ESPACIOS VECTORIALES

I. Definiciones. Primeras propiedades
II. Subespacios vectoriales
III. Independencia lineal. Bases.

I. DEFINICIONES. PRIMERAS PROPIEDADES

1. Estructura. Ejemplos.

a) Definición.- "Dado un cuerpo conmutativo K, de elementos neutros 0 y 1, se dice que un conjunto E, no vacío, provisto de una operación interna y de una externa cuyo dominio de operadores es K, tiene una estructura de espacio vectorial sobre K si:

- E es un grupo abeliano para su operación interna
- La operación externa es tal que, para todo $\vec{x} \in E$ y todos λ, μ de K, se tenga

$$\lambda(\mu \vec{x}) = (\lambda \mu)\vec{x} \quad \text{y} \quad 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$$

- La operación externa es distributiva con relación a la suma en K y con relación a la operación interna de E".

Si designamos multiplicativamente la ley externa de E y aditivamente su ley interna, y representamos los elementos neutros de la suma en K, y la suma en E por 0 y $\vec{0}$, respectivamente, los axiomas de la estructura de espacio vectorial sobre K se escriben:

a) Ley de composición interna +:
$$\begin{aligned} E \times E &\longrightarrow E \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\longrightarrow \vec{u} + \vec{v} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} V_1.- (\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E); & (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) \\ V_2.- (\exists \vec{0} \in E)(\forall \vec{x} \in E); & \vec{0} + \vec{x} = \vec{x} + \vec{0} = \vec{x} \\ V_3.- (\forall \vec{x} \in E)(\exists (-\vec{x}) \in E); & \vec{x} + (-\vec{x}) = (-\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0} \\ V_4.- (\forall \vec{x}, \vec{y} \in E); & \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x} \end{cases}$$

b) Ley de composición externa $\cdot$:
$$\begin{aligned} K \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, \vec{x}) &\longrightarrow \lambda \vec{x} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} V_5.- (\forall \vec{x} \in E)(\forall \lambda, \mu \in K); & \lambda(\mu \vec{x}) = (\lambda \mu)\vec{x} \\ V_6.- (\forall \vec{x} \in E); & 1 \cdot \vec{x} = \vec{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_7.- (\forall \vec{x} \in E)\ (\forall \lambda, \mu \in K) \ ; \quad (\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda \vec{x} + \mu \vec{x} \\ V_8.- (\forall \vec{x}, \vec{y} \in E)\ (\forall \lambda \in K) \ ; \quad \lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \vec{x} + \lambda \vec{y} \end{cases}$$

El conjunto E para su adición interna es un grupo abeliano: se le llama grupo aditivo de E. Los elementos $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \ldots$ de E se llaman los vectores de E. Los elementos $\lambda, \mu, \ldots$ del cuerpo de operadores K se llaman escalares. K se llama cuerpo de base del espacio vectorial E (recordemos que es conmutativo sin que haya que repetirlo cada vez que se hable de él).

Notaciones.

- $\vec{0}$: vector nulo ó elemento neutro de $(E, +)$
- $-\vec{v}$: vector opuesto de $\vec{v}$ (elemento simétrico respecto de $(E, +)$)

0 : Elemento neutro de la operación suma en K

$-\lambda$: " opuesto de un escalar λ respecto a la suma en K

1 : " neutro de la operación producto en K

λ^{-1} : " inverso de un escalar λ respecto del producto en K

Ejemplos: Queysanne Pag. 279.

*. Cuando el cuerpo de base es el de los números reales $\mathbb{R}$, el espacio vectorial recibe el nombre de espacio vectorial real.

---

2. Reglas de cálculo en un espacio vectorial

a) La multiplicación externa es distributiva respecto de la resta en E, llamando (definición) resta de dos vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$, y se representa por $\vec{x} - \vec{y}$, a la suma de $\vec{x}$ con el opuesto de $\vec{y}$, es decir, $\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-\vec{y})$ por definición. Veamos ahora la distributividad; para todo λ, todo $\vec{x}$ y todo $\vec{y}$

$$\lambda(\vec{x} - \vec{y}) + \lambda \vec{y} = \lambda\left[(\vec{x} - \vec{y}) + \vec{y}\right] = \lambda \vec{x} \quad \text{de donde}$$

$$\boxed{\lambda(\vec{x} - \vec{y}) = \lambda \vec{x} - \lambda \vec{y}}$$

b) $\boxed{\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}}$ en efecto, haciendo $\vec{x} = \vec{y}$ en el anterior resultado.

c) $\boxed{\lambda(-\vec{x}) = -\lambda \vec{x}}$ si pues:

$$\lambda(-\vec{x}) = \lambda(\vec{0} - \vec{x}) = \lambda \vec{0} - \lambda \vec{x} = \vec{0} - \lambda \vec{x} = -\lambda \vec{x}$$

d) La multiplicación externa es distributiva respecto a la resta en K; pues:

$$(\lambda-\mu)\vec{x}+\mu\vec{x}=[(\lambda-\mu)+\mu]\vec{x}=\lambda\vec{x} \quad \text{de donde}$$

$$\boxed{(\lambda-\mu)\vec{x}=\lambda\vec{x}-\mu\vec{x}}$$

e) $\boxed{0\cdot\vec{x}=\vec{0}}$ en efecto, haciendo $\lambda=\mu$ en el anterior resultado.

f) $\boxed{(-\lambda)\vec{x}=-\lambda\vec{x}}$ si pues:

$$(-\lambda)\vec{x}=(0-\lambda)\vec{x}=0\cdot\vec{x}-\lambda\vec{x}=\vec{0}-\lambda\vec{x}=-\lambda\vec{x}$$

g) Si el producto de un escalar por un vector es el vector nulo, entonces el escalar es 0 ó el vector es nulo. Es decir, si $\alpha\cdot\vec{x}=\vec{0} \Rightarrow \alpha=0$ ó $\vec{x}=\vec{0}$

Si $\lambda\cdot\vec{x}=\vec{0}$ ó bien $\lambda=0$ (es la propiedad e) ó bien $\lambda\neq 0$ y entonces λ es inversible en el cuerpo K, es decir existe λ^{-1}, de donde, y como $\lambda\cdot\vec{x}=\vec{0} \Rightarrow$ $\lambda^{-1}(\lambda\vec{x})=\lambda^{-1}\cdot\vec{0} \Rightarrow (\lambda^{-1}\cdot\lambda)\vec{x}=\vec{0} \Rightarrow 1\cdot\vec{x}=\vec{0} \Rightarrow \vec{x}=\vec{0}$.

Este resultado y las propiedades b) y e) demuestran que no hay, en general, ningún inconveniente en representar $\vec{0}$ y 0 por el mismo símbolo 0, sin embargo vamos a seguir diferenciándolo aunque no se exija. Igualmente hemos designado por 1 al elemento unidad de K, pues en general los cuerpos que se utilizan normalmente son Q, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

---

3. Producto cartesiano de espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K

Sean E_1 y E_2 dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo conmutativo K, consideremos el producto cartesiano $E_1\times E_2=\{\vec{v}=(\vec{x}_1,\vec{x}_2)/\vec{x}_1\in E_1;\ \vec{x}_2\in E_2\}$.
Definiendo en este conjunto una operación interna +, por:

$$(\vec{x}_1,\vec{x}_2)+(\vec{y}_1,\vec{y}_2)=(\vec{x}_1+\vec{y}_1,\vec{x}_2+\vec{y}_2)\in E_1\times E_2 \quad \text{ya que}$$

$\vec{x}_1+\vec{y}_1\in E_1$ y $\vec{x}_2+\vec{y}_2\in E_2$ por ser operaciones internas en cada espacio E_1 y E_2.
y una operación externa cuyo dominio de operadores sea el mismo K, definido por:

$$\lambda(\vec{x}_1,\vec{x}_2)=(\lambda\vec{x}_1,\lambda\vec{x}_2)\in E_1\times E_2$$

proporcionan a $E_1\times E_2$ una estructura de espacio vectorial sobre K (ver como ejercicio), se le llama espacio vectorial producto cartesiano $E_1\times E_2$.

Dados n espacios vectoriales E_1, ... E_n sobre K ...

$$\left.\begin{array}{l}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) + (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n) = (\vec{x}_1 + \vec{y}_1, \vec{x}_2 + \vec{y}_2, \dots, \vec{x}_n + \vec{y}_n) \\ \lambda (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) = (\lambda \vec{x}_1, \lambda \vec{x}_2, \dots, \lambda \vec{x}_n)\end{array}\right\} \begin{array}{l}\forall \lambda \in K \\ \forall x_i, y_i \in E_i \; ; \; i = 1 \dots n\end{array}$$

definen el espacio vectorial $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$. Se pueden tomar $E_1 = E_2 = \dots = E_n$. En particular, puesto que K es un espacio vectorial sobre K (ver ejercicios), $K \times K \times \overset{n)}{\dots} \times K = K^n$ es un espacio vectorial sobre K, tendremos:

$$a + b = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)$$

$$\lambda a = \lambda (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \dots, \lambda \alpha_n)$$

Un ejemplo claro lo muestra $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$, y en particular mucho más conocidos: $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$, y $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$.

II. Subespacios Vectoriales

4. Definición. Ejemplos

a) Def. "Toda parte no vacía F de un espacio vectorial E sobre K, ~~se dice~~ que tenga estructura de espacio vectorial sobre K con las mismas operaciones, interna y externa respectivamente, que E, se dice que es un subespacio vectorial de E"

Teorema 1.- "Toda parte no vacía F de un espacio vectorial E sobre K, que sea estable para la adición interna de E y la multiplicación externa, es subespacio vectorial de E".

Ser F estable significa que $\left\{\begin{array}{l}\forall \vec{x}, \vec{y} \in F \\ \forall \lambda \in K\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\vec{x} + \vec{y} \\ \lambda \vec{x}\end{array}\right\}$ también pertenezcan a F.

entonces si F es estable y $\vec{x} \in F$, haciendo $\lambda = -1$; $(-1)\vec{x} = -\vec{x} \in F$, en consecuencia, el axioma V_3 se verifica en F. Haciendo $\lambda = 0$; $0 . \vec{x} = \vec{0} \in F$, en consecuencia, el axioma V_2 se verifica en F. (Demostrar los siguientes axiomas como ejercicio).

Teorema 2.- "Para que una parte no vacía F de un espacio vectorial E sobre K, sea un subespacio vectorial de E, es necesario y suficiente que:

$$(1) \qquad (\forall \vec{x}, \vec{y} \in F) \quad \vec{x} + \vec{y} \in F$$

$$(2) \qquad (\forall \vec{x} \in F)(\forall \alpha \in K) \quad \alpha \vec{x} \in F \text{''}.$$

Demostración:

a) Condición necesaria: "si F es subespacio, entonces se verifican (1) y (2)"

Por ser F subespacio, la adición interna y el producto externo son estables en F, por lo tanto se cumplen las condiciones (1) y (2).

b) Condición suficiente: "si se cumplen (1) y (2), entonces F es subespacio"

Las condiciones (1) y (2) nos dicen que la adición interna y el producto externo son estables en F, y por el teorema anterior, entonces F es subespacio.

Teorema 4-3.- "La condición necesaria y suficiente para que un subconjunto no vacío F de un espacio vectorial E sobre K, sea un subespacio de E es que $(\forall \lambda, \mu \in K) ; (\forall \vec{x}, \vec{y} \in F) \ \lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in F$"

a) C. necesaria. $\emptyset \neq F \subset E$ es subespacio de $E \Rightarrow \forall \lambda, \mu \in K ; \forall \vec{x}, \vec{y} \in F \ \lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in F$

En efecto, por ser F subespacio de E, $\lambda\vec{x} \in F$ y $\mu \cdot \vec{y} \in F$ luego $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in F$

b) C. suficiente. $\forall \lambda, \mu \in K, \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in F, \ \lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in F \Rightarrow$ F es subespacio de E

Se han de cumplir las condiciones de subespacio (1) y (2)

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Tomando } \lambda = \mu = 1 & \Rightarrow 1\vec{x} + 1\vec{y} \in F ; \ \vec{x} + \vec{y} \in F \ \text{ se cumple (1)} \\ \quad '' \qquad \mu = 0 & \Rightarrow \lambda\vec{x} + 0 \cdot \vec{y} = \lambda\vec{x} + \vec{0} = \lambda\vec{x} \in F \ \ '' \ (2) \end{array}\right\} \Rightarrow F \text{ subespacio.}$$

$$\boxed{x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_p \vec{x}_p = \sum_{i=1} \lambda_i x_i}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ son escalares, se llama combinación lineal de $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p$.

Se verificará fácilmente que el conjunto de todas las combinaciones lineales, de p elementos determinados $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p$ de E es un subespacio vectorial de E. (Ejercicio).

---

5. Intersección de subespacios vectoriales. Subespacio vectorial engendrado por una parte A de un espacio vectorial E.

a) La intersección de dos subespacios vectoriales F_1 y F_2 de un espacio vectorial E, no es nunca vacía (al menos contiene el $\vec{0}$); por un lado, si $\vec{x}$ e $\vec{y}$ pertenecen a F_1 y F_2, lo mismo sucede con $\vec{x} + \vec{y}$ y con $\lambda\vec{x}$ para todo λ de K; por tanto, $\vec{x} + \vec{y}$ y $\lambda\vec{x}$ pertenecen a $F_1 \cap F_2$, lo que implica que es un subespacio vectorial de E. De una manera más general, sea $\mathfrak{F}$ una familia cualquiera de subespacios vectoriales de E, consideremos la intersección de todos

$$I = \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F$$

no es vacía (contiene $\vec{0}$), si $\vec{x}$ e $\vec{y}$ pertenecen a todo F de $\mathfrak{F}$, $\vec{x} + \vec{y}$ y $\lambda\vec{x}$ $(\forall \lambda \in K)$ pertenecerán a I por tanto: Toda intersección de subespacios vectoriales de E es un subespacio vectorial de E

b) Consideremos en particular una parte no vacía A de E ($A \subset E$), existen subespacios vectoriales de E que contienen A, por ejemplo E. Consideremos la intersección de esta familia no vacía de subespacios vectoriales de E que contienen A, que será un nuevo subespacio vectorial de E y será el menor de todos los de esa familia, a este subespacio se le llama subespacio vectorial engendrado por A, y se denota por $\langle A \rangle$.

Busquemos, por ejemplo, el subespacio vectorial F engendrado por el sistema de vectores $A = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ (es decir, $F = \langle A \rangle$); sea F' el conjunto de todas las combinaciones lineales de A, (es decir, $F' = \{\vec{x} / \vec{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{x}_i, \forall \lambda_i \in K\}$), ya hemos visto (en ejercicio) que F' es subespacio de E; F' contiene A ($A \subset F'$) ya que

$\forall \vec{x}_i \in A, \quad \vec{x}_i = 0 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + \dots + 1 \cdot \vec{x}_i + \dots + 0 \cdot \vec{x}_p \in F'$.

También F' está contenido en F ($F' \subset F$), es decir, F contiene todas las combinaciones lineales de A. En efecto $\forall \vec{x} \in F'$, $\vec{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{x}_i = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_p \vec{x}_p$ pero, por la definición de F, todo $\vec{x}_i \in A$ también pertenece a $\langle A \rangle = F$, $\vec{x}_i \in F$, luego $\lambda_i \vec{x}_i \in F$ por ser subespacio, y $\underbrace{\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_p \vec{x}_p}_{= \vec{x}} \in F$ también por ser subespacio, así que $\vec{x} \in F \Rightarrow F' \subset F$.

Pero F' contiene A y F es el menor subespacio vectorial conteniendo A; por tanto $F \subset F'$

Y si $F' \subset F$ y $F \subset F' \Rightarrow F = F'$.

Teorema y Definición. — «"El menor subespacio vectorial F conteniendo p elementos de E, $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p$, es decir, el subespacio engendrado por $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ es el subespacio de las combinaciones lineales de $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p$.

Se dice que $A = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ es una sistema generador (ó parte generatriz) de F; cuando el mismo espacio vectorial E está engendrado por un número finito de sus elementos se dice que E es de dimensión finita"» (*)

Ejercicio: En el espacio vectorial de los polinomios en x con coeficientes reales. ¿cuál es el subespacio engendrado por x^2 y x^5.

(*) Observemos que no es necesario suponer aquí los p vectores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p$ distintos. Si se suprimen todos los que son iguales entre sí, menos uno, o los que son nulos, no se modifica el subespacio engendrado por el sistema considerado (Ejercicio ó ejemplo)

6. Suma de dos subespacios vectoriales. Subespacios suplementarios.

a) Si E_1 y E_2 son dos subespacios vectoriales del espacio vectorial E sobre K, la parte de E descrita por $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ donde $\vec{x}_1$ recorre E_1 y $\vec{x}_2$, E_2 es un subespacio de E designado por $\underline{E_1 + E_2}$. En efecto:

(1) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E_1 + E_2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \\ \vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 \end{array} \right.$ con $\left. \begin{array}{l} \vec{x}_1, \vec{y}_1 \in E_1 \\ \vec{x}_2, \vec{y}_2 \in E_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + (\vec{y}_1 + \vec{y}_2) =$

$= (\vec{x}_1 + \vec{y}_1) + (\vec{x}_2 + \vec{y}_2) \in E_1 + E_2$ pues $\left\{ \begin{array}{l} \vec{x}_1 + \vec{y}_1 \in E_1 \\ \vec{x}_2 + \vec{y}_2 \in E_2 \end{array} \right\}$ por ser E_1 y E_2, resp., subespacios.

(2) $\lambda \cdot \vec{x} = \lambda (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \lambda \vec{x}_1 + \lambda \vec{x}_2 \in E_1 + E_2$ pues $\left\{ \begin{array}{l} \lambda \vec{x}_1 \in E_1 \\ \lambda \vec{x}_2 \in E_2 \end{array} \right\}$ por ser E_1 y E_2, subespacios.

(*) Por otra parte, vamos a ver que: 1) $E_1 + E_2$ contiene a E_1 y E_2 a la vez, es decir, que contiene a la unión $E_1 \cup E_2$, y 2) $E_1 + E_2$ es el menor subespacio que contiene a $E_1 \cup E_2$, es decir, que $E_1 + E_2 = \langle E_1 \cup E_2 \rangle$

1) Si $\vec{x} \in E_1 \cup E_2 \Rightarrow \vec{x} \in E_1$ ó $\vec{x} \in E_2$ ó a ambos

si $\vec{x}$ pertenece a E_1, $\vec{x} = \vec{x} + \vec{0}$ donde $\vec{0} \in E_2$ luego $\vec{x} \in E_1 + E_2$
si $\vec{x}$ " " E_2, $\vec{x} = \vec{0} + \vec{x}$ " $\vec{0} \in E_1$ " $\vec{x} \in E_1 + E_2$ $\Big\} \Rightarrow \underline{E_1 \cup E_2 \subset E_1 + E_2}$

2) Sabemos que $\langle E_1 \cup E_2 \rangle$ es el menor subespacio que contiene a $E_1 \cup E_2$, así que $\langle E_1 \cup E_2 \rangle \subset E_1 + E_2$
Para ver que $E_1 + E_2 \subset \langle E_1 \cup E_2 \rangle$ tomemos un elemento cualquiera $\vec{x}$ de $E_1 + E_2$.
Recordemos también que $\langle E_1 \cup E_2 \rangle$ coincide con el conjunto de todas las combinaciones lineales de $E_1 \cup E_2$. Si $\vec{x} \in E_1 + E_2$, $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ con $\vec{x}_1 \in E_1$ y $\vec{x}_2 \in E_2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{x}_1 \in E_1 \cup E_2 \\ \vec{x}_2 \in E_1 \cup E_2 \end{array} \right.$

luego $\vec{x} = 1 \cdot \vec{x}_1 + 1 \cdot \vec{x}_2$ que es una combinación lineal de elementos de $E_1 \cup E_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{x} \in \langle E_1 \cup E_2 \rangle \Rightarrow E_1 + E_2 \subset \langle E_1 \cup E_2 \rangle$

Por lo tanto $\underline{E_1 + E_2 = \langle E_1 \cup E_2 \rangle}$, en consecuencia.

<u>Teorema 1 y Definición</u>.- "Si E_1 y E_2 son dos subespacios vectoriales de E, el conjunto $E_1 + E_2$ es el subespacio vectorial engendrado por $E_1 \cup E_2$, se le llama subespacio suma de E_1 y de E_2"

<u>OBSERVACION</u>. $E_1 \cup E_2$ no es, en general, un subespacio vectorial de E. ¿en qué caso lo es? (Ejercicio). Poner un ejemplo. Esp. vectorial $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ sobre $\mathbb{R}$.

sea $E_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = 0 \}$ es subespacio de $\mathbb{R}^2$
$E_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x = 0 \}$ " " " " $\Big\}$ sin embargo $E_1 \cup E_2$ no lo es.
porque $(x, 0) + (0, y) = (x, y) \notin E_1 \cup E_2$

b) Consideremos un espacio vectorial E y dos de sus subespacios E_1 y E_2 tales que $E = E_1 + E_2$, es decir, $\forall \vec{x} \in E$, $\exists \vec{x}_1 \in E_1$ y $\exists \vec{x}_2 \in E_2 \,/\, \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$
en general esta descomposición de $\vec{x}$ no es única. Supongamos que es única y determinemos la intersección de E_1 y E_2; sea $\vec{x}$ un elemento común a E_1 y E_2, se tendrá

$$\begin{cases} \vec{x} = \vec{x} + \vec{0} & \text{con } \vec{x} \in E_1 \text{ y } \vec{0} \in E_2 \\ \vec{x} = \vec{0} + \vec{x} & \text{con } \vec{0} \in E_1 \text{ y } \vec{x} \in E_2 \end{cases}$$

por tanto, $\vec{x}$ debe ser igual $\vec{0}$ para que la descomposición de todo elemento $\vec{x}$ sea única, luego $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$

Recíprocamente, supongamos $E = E_1 + E_2$, y $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$, ó sea, suponiendo la no unicidad,

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \vec{x}_1' + \vec{x}_2' \quad \text{con} \quad \vec{x}_1, \vec{x}_1' \in E_1, \quad \vec{x}_2, \vec{x}_2' \in E_2$$

$\Rightarrow \quad \vec{x}_1 - \vec{x}_1' = \vec{x}_2' - \vec{x}_2 = \vec{0}$ pues este elemento $\vec{x}_1 - \vec{x}_1' = \vec{x}_2' - \vec{x}_2$ pertenece a $E_1 \cap E_2$, luego $\vec{x}_1 = \vec{x}_1'$ y $\vec{x}_2 = \vec{x}_2'$, de donde:

<u>Teorema 2 y Definición</u>. - "Dados dos subespacios vectoriales E_1, E_2 de un espacio vectorial E tales que $E = E_1 + E_2$, las dos condiciones siguientes son equivalentes:

(1). La descomposición de todo elemento $\vec{x}$ de E en suma $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$, $\vec{x}_1$ perteneciente a E_1 y $\vec{x}_2$ a E_2 es única.

2. $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$

Cuando una de estas condiciones se cumple, se dice que E_1 y E_2 son dos <u>subespacios suplementarios de E</u> y se escribe $E = E_1 \oplus E_2$ y se lee « <u>E es suma directa de E_1 y E_2</u> »"

<u>OBSERVACION</u>: No confundir <u>suplementario</u> del subespacio E_1 del espacio vectorial E y el complementario del conjunto E_1 respecto a E $(E - E_1)$; por otra parte $E - E_1$ no es subespacio de E, pues no contiene el $\vec{0}$.

Surgen dos preguntas: si E_1 es un subespacio de E ¿ <u>existe</u> un suplementario E_2 de E_1 respecto a E, y si existe es <u>único</u>?. La respuesta a la segunda pregunta es negativa (ver ejemplo). Respecto a la primera la respuesta es positiva cualquiera que sea el subespacio E_1 de E (lo veremos en el apartado 11, para los esp. de dimensión finita).

<u>Ejemplos y ejercicios</u>

1. Sea E_1 el espacio vectorial de los vectores del eje real Ox_1 y E_2 el espacio vectorial de los vectores libres del eje real Ox_2; consideremos $E_1 \times E_2$ isomorfo a $\mathbb{R}^2$. Sea $E_1' =$
$= \{ \vec{x} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \,/\, \vec{x}_2 = \vec{0} \}$. Identificar E_1 y E_1' quiere decir confundir $\vec{x}_1$ vector de E

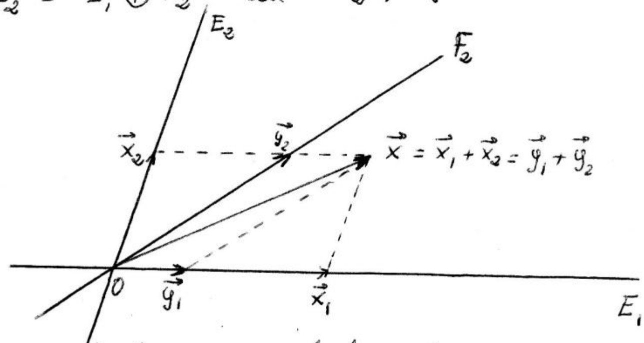
y $(\vec{x}_1, \vec{0})$ vector de $E_1 \times E_2$, e identificar $E_1 \times E_2$ y $E_1 \oplus E_2$ equivale a confundir $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ de $E_1 \times E_2$ y $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ de $E_1 \oplus E_2$. $\vec{x}_1$ es la proyección de $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ sobre E_1 paralelamente a E_2.

Consideremos un tercer eje real, Oy_2 distinto de Ox_1 y Ox_2, sea F_2 el espacio vectorial de los vectores libres de Oy_2; tendremos de una manera única para todo $\vec{x} \in E$

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \ ; \ \vec{x}_1 \in E_1 \ , \ \vec{x}_2 \in E_2$$

$$\vec{x} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 \ ; \ \vec{y}_1 \in E_1 \ , \ \vec{y}_2 \in F_2$$

luego $E = E_1 \oplus E_2 = E_1 \oplus F_2$ con $E_2 \neq F_2$



2. Sea $P[x]$ el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de los polinomios con coeficientes reales, y A un polinomio de grado superior o igual a 1. Si E_1 es el conjunto de los polinomios múltiplos del polinomio A y E_2 el conjunto de los polinomios de grado estrictamente inferior al de A, demostrar que E_1 y E_2 son subespacios suplementarios de $P[x]$.

$\text{grad}(A) \geq 1$, Sea $B \in E_1 \Rightarrow B$ es múltiplo de $A \Rightarrow \exists\, Q \in P[x] \,/$

$B = A \cdot Q$. Veamos el grado de B:

Si $Q = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow 0 \in E_1$

Si $Q \neq 0$ con $\text{grad}(A) \geq 1 \Rightarrow \text{grad}(B) \geq 1$ luego

$$\left.\begin{array}{l} E_1 = \{\text{polinomios de grado} \geq 1 \text{, junto con el cero}\} \\ E_2 = \{\text{polinomio de grado} < 1\} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{E_1 \cap E_2 = 0}$$

Hay que ver ahora que $P = E_1 + E_2$, está claro que $E_1 + E_2 \subset P$.

Sea D un polinomio cualquiera de P de grado $n \Rightarrow D(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 =$

$= (a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x) + a_0 = G + H$ donde $G \in E_1$ y $H \in E_2$

$\Rightarrow P \subset E_1 + E_2 \Rightarrow \underline{P = E_1 + E_2} \Rightarrow \boxed{P = E_1 \oplus E_2}$

7. Independencia lineal

a) Sea E un espacio vectorial sobre K de dimensión finita y $G = \{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n\}$ un sistema generador de E. Es evidente que toda parte G' de E que contiene G ($G \subset G'$) es también un sistema generador de E; inversamente se puede preguntar si existen partes propias G'' de G que engendran E ($G'' \subset G$); para simplificar, se puede igualmente hallar una parte que sea sistema generador minimal de E, es decir, un sistema generador G de E tal que si prescindimos de cualquiera de sus elementos (vectores), $\vec{g}_i$, el nuevo sistema $G - \{\vec{g}_i\}$ ya no engendre E. Supongamos que suceda así. Observemos que un tal sistema minimal es forzosamente tal que $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n$ sean todos distintos y no nulos (recordar (*) de pag. 3-bis); vamos también a ver que una relación de la forma $\lambda_1 \vec{g}_1 + \lambda_2 \vec{g}_2 + \dots + \lambda_n \vec{g}_n = \vec{0}$ sólo es posible si $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$; en efecto, supongamos que una de los λ_i sea no nula, cambiando si es necesario, se puede suponer, sin perder generalidad, que es el coeficiente λ_n de $\vec{g}_n$; λ_n es entonces inversible en K y se obtiene

$$\vec{g}_n = -\lambda_1 (\lambda_n)^{-1} \vec{g}_1 - \dots - \lambda_{n-1} (\lambda_n)^{-1} \vec{g}_{n-1} = \mu_1 \vec{g}_1 + \dots + \mu_{n-1} \vec{g}_{n-1}$$

siendo $\mu_i = -\lambda_i (\lambda_n)^{-1}$; pero entonces para todo $\vec{a}$ de E, tendremos

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{g}_1 + \alpha_2 \vec{g}_2 + \dots + \alpha_{n-1} \vec{g}_{n-1} + \alpha_n \vec{g}_n = \alpha_1 \vec{g}_1 + \alpha_2 \vec{g}_2 + \dots + \alpha_{n-1} \vec{g}_{n-1} + \alpha_n (\mu_1 \vec{g}_1 + \dots + \mu_{n-1} \vec{g}_{n-1})$$

y $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_{n-1}\} = G - \{\vec{g}_n\}$ sería un sistema generador de E, lo que es contrario a la hipótesis.

Estas consideraciones nos conducen a dar la definición siguiente en un espacio vectorial cualquiera:

Definición.- "Una familia (sistema) finita $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2 \dots \vec{x}_p\}$ de elementos de un espacio vectorial E es libre si $\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_p \vec{x}_p = \vec{0} \Rightarrow (\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0)$.

Una familia cualquiera que no es libre se le llama ligada"

Por consiguiente, una familia cualquiera es ligada si existen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, elementos escalares, no todos nulos tales que $\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_p \vec{x}_p = \vec{0}$.

Diremos que los elementos de una familia libre describen un ~~sistema~~ parte libre de E, o también que los elementos de una familia libre son linealmente independientes. Una parte no libre de E se llama parte ligada de E, se dice que sus elementos son linealmente dependientes

b) De las definiciones resultan las propiedades inmediatas siguientes:

— Toda subfamilia de una familia libre es libre: En efecto sea la familia de p vectores $L = \{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}, \dots, \vec{x}_p \}$, supongamos que la subfamilia de los n primeros vectores ($n < p$) no es libre (no se pierde generalidad al considerar los n "primeros", cambiando la numeración si es necesario) $\Rightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \in K$ no todos nulos tales que

$\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n = \vec{0}$ $\Rightarrow$ añadiendo los términos siguientes:

$\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n + 0 \cdot \vec{x}_{n+1} + \dots + 0 \cdot \vec{x}_p = \vec{0}$ $\Rightarrow$ con $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n, 0, \dots 0 \in K$ no todos nulos, luego L no es libre en contra de la hipótesis.

— Toda superfamilia F de una familia ligada G es ligada; $F \supset G$, en efecto F es ligada, ya que si no lo fuera, G, que es una subfamilia de F, tampoco lo sería por la propiedad anterior, en contra de la hipótesis.

— Los elementos de una familia libre son todos distintos: en efecto, si se tiene $\vec{x}_h = \vec{x}_k$ siendo $h \neq k$, la subfamilia $\{ \vec{x}_h, \vec{x}_k \}$ sería ligada, pues $\vec{x}_h - \vec{x}_k = \vec{0} \Rightarrow 1 \cdot \vec{x}_h + (-1) \vec{x}_k = \vec{0}$ en contra de la primera propiedad $\Rightarrow \vec{x}_h \neq \vec{x}_k \quad \forall h, k \in K$.

— Los elementos de una familia libre son no nulos, pues si, por ejemplo, $\vec{x}_p = \vec{0}$, se tendría con $\lambda \neq 0$ $\quad 0 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{x}_{p-1} + \lambda \cdot \vec{x}_p = \vec{0}$. En particular $\{ \vec{x} \}$ es libre si y sólo si $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Por la primera propiedad se podría decir que: "Una familia cualquiera $\{ \vec{x}_1, \dots \vec{x}_p \}$ es libre si todas sus subfamilias finitas son libres" y por consiguiente, "una familia cualquiera es ligada si hay una subfamilia finita ligada".

c) TEOREMA 1.- "Una familia es ligada si y sólo si existe un elemento en la familia que sea combinación lineal finita de los otros elementos de la familia"

La proposición directa es evidente, pues si $\vec{x}_p$ es combinación lineal de los restantes:

$\vec{x}_p = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_{p-1} \vec{x}_{p-1} \Rightarrow \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_{p-1} \vec{x}_{p-1} + (-1) \vec{x}_p = \vec{0}$ con $-1 \neq 0$

Recíprocamente, si la familia es ligada existen los escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ no todos nulos tales que $\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_p \vec{x}_p = \vec{0}$; supongamos que $\lambda_p \neq 0$ luego tiene inverso $(\lambda_p)^{-1}$ de donde:

$$\vec{x}_p = -\lambda_1 \cdot (\lambda_p)^{-1} \vec{x}_1 - \lambda_2 (\lambda_p)^{-1} \vec{x}_2 - \dots - \lambda_{p-1} (\lambda_p)^{-1} \vec{x}_{p-1} = \mu_1 \vec{x}_1 + \dots + \mu_{p-1} \vec{x}_{p-1}$$

En particular …

tal que $\vec{x}_2 = \lambda \vec{x}_1$: se dice que $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$ son colineales.

COROLARIO.- "Si $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ es una parte libre de p elementos de E y $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p, \vec{x}\}$ una parte ligada, $\vec{x}$ pertenece al subespacio engendrado por $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ y se tiene $\vec{x} = \mu_1 \vec{x}_1 + \mu_2 \vec{x}_2 + \cdots + \mu_p \vec{x}_p$ de una manera única."

Tenemos en efecto $\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \cdots + \lambda_p \vec{x}_p + \lambda \vec{x} = \vec{0}$ con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \lambda$ no todos nulos. $\lambda \neq 0$, pues si tuviera $\lambda = 0$ uno de los escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sería no nulo, por tanto $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ sería ligada; y despejando $\vec{x}$ se tendrá $\vec{x} = \mu_1 \vec{x}_1 + \cdots + \mu_p \vec{x}_p$.

Supongamos $\mu_1 \vec{x}_1 + \mu_2 \vec{x}_2 + \cdots + \mu_p \vec{x}_p = \mu_1' \vec{x}_1 + \mu_2' \vec{x}_2 + \cdots + \mu_p' \vec{x}_p$

se tendrá

$$(\mu_1 - \mu_1')\vec{x}_1 + (\mu_2 - \mu_2')\vec{x}_2 + \cdots + (\mu_p - \mu_p')\vec{x}_p = \vec{0} \Rightarrow \mu_i - \mu_i' = 0 \quad \forall i = 1 \ldots p$$

por ser libre $\Rightarrow \mu_i = \mu_i'$ luego es única la descomposición.

d) TEOREMA 2.- "Si $L = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m\}$ es un sistema libre con m elementos de un espacio vectorial E y $G = \{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_p\}$ es un sistema generador de E con p elementos, entonces $m \leq p$ y $G' = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m, \vec{g}_{m+1}, \ldots, \vec{g}_p\}$ (cambiando eventualmente la numeración de los $\vec{g}$) es también una sistema generador de E"

En efecto $\vec{a}_1 = \alpha_{11} \vec{g}_1 + \cdots + \alpha_{1p} \vec{g}_p$ al menos un escalar $\alpha_{1i} \neq 0$ pues si no $\vec{a}_1 = \vec{0}$ y L no sería libre; cambiando la numeración se puede suponer que es $\alpha_{11} \neq 0$ por tanto $\vec{g}_1 = \beta_{11} \vec{a}_1 + \beta_{12} \vec{g}_2 + \cdots + \beta_{1p} \vec{g}_p$. Por lo tanto resulta que $G_1 = \{\vec{a}_1, \vec{g}_2 \ldots \vec{g}_p\}$ es un sistema generador de E; por tanto

$$\vec{a}_2 = \alpha_{21} \vec{a}_1 + \alpha_{22} \vec{g}_2 + \cdots + \alpha_{2p} \vec{g}_p$$ al menos uno de los escalares

$\alpha_{22}, \ldots \alpha_{2p}$ es no nulo, pues si $\alpha_{22} = \cdots = \alpha_{2p} = 0$, se tendría $\vec{a}_2 = \alpha_{21} \vec{a}_1$ y L no sería libre; sea, cambiando si es preciso de numeración $\alpha_{22} \neq 0$, tendremos:

$$\vec{g}_2 = \beta_{21} \vec{a}_1 + \beta_{22} \vec{a}_2 + \beta_{23} \vec{g}_3 + \cdots + \beta_{2p} \vec{g}_p$$

por tanto, $G_2 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{g}_3, \ldots, \vec{g}_p\}$ es también es un sistema generador de E; si se repite un número finito de veces este proceso, vemos que para $p' \leq \inf(m, p)$

$G_{p'} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{p'}, \vec{g}_{p'+1}, \ldots, \vec{g}_p\}$ es un sistema generador de E

Demostremos que $m > p$ es imposible, en este caso $p' = p$, luego $G_p = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p\}$ engendraría E y los elementos $\vec{a}_{p+1}, \vec{a}_{p+2}, \dots, \vec{a}_m$ serían combinaciones lineales de $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p$; por tanto, L no sería libre.

Por consiguiente, $\boxed{m \leq p}$ y al cabo de un número finito de iguales procesos, llegaremos, por tanto, al sistema generador $G_m = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m, \vec{g}_{m+1}, \dots, \vec{g}_p\}$

De $m \leq p$ resulta el corolario siguiente.

COROLARIO.- "Si G es una parte generadora, con p elementos, de un espacio vectorial E, toda parte de E que tiene estrictamente más de p elementos es ligada"

---

8. Bases de un espacio vectorial de dimensión finita

Sea E un espacio vectorial E sobre el cuerpo K, de dimensión finita, y $G_m = \{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_p\}$ un sistema generador minimal de E, que tiene p elementos (ver 7-a), hemos visto que este sistema es libre; es, por otra parte, la noción de sistema generador minimal la que nos ha servido de introducción a la noción de independencia lineal.

Recíprocamente, sea $B = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p\}$ un sistema generador libre cualquiera, con p elementos, vamos a demostrar que es un sistema generador minimal; en efecto, si no lo fuera, uno de estos elementos sería una combinación lineal de los otros y B no sería sistema libre.

Por otro lado, si $\vec{x}$ es un elemento cualquiera de E y $B = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p\}$ un sistema generador libre (por tanto, minimal), $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p, \vec{x}\}$ es un sistema ligado, pues $\vec{x}$ sería combinación lineal de los elementos de B; B es, por tanto, una familia libre tal que si se le añade un elemento cualquiera $\vec{x}$, cesa de serlo; se dice que es sistema libre maximal.

Recíprocamente, sea $L_M = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ una parte libre maximal, es decir, una parte libre tal que para todo $\vec{x}$ de E, $L_M \cup \{\vec{x}\}$ sea ligada; según el corolario del teorema 1 del apartado 7, todo $\vec{x}$ de E es una combinación lineal de $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots \vec{b}_n$; por tanto $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ es un sistema generador, y libre, de E, de donde:

TEOREMA 3 y DEFINICION.- "Para un sistema B no vacío de un espacio vectorial sobre K, de dimensión finita, las tres propiedades siguientes son equivalentes:

1. B es un sistema generador libre de E.
2. B es un sistema generador minimal de E.

Todo sistema $B=\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots\vec{a}_n\}$ que posee una de estas propiedades se le llama una base de E. Para todo $\vec{x}$ de E existe una única familia de escalares (α_i) $(1\le i\le n)$ tales que

$$\vec{x}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\dots+\alpha_n\vec{a}_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{a}_i$$

$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ se llaman las coordenadas de $\vec{x}$ respecto a la base B"

Observemos el hecho de que B no sea vacío implica que $E\neq\{\vec{0}\}$.

Ejemplos: Queysanne Pag 295. etc.

---

9. Existencia de bases para un espacio de dimensión finita

a) Acabamos de dar tres caracterizaciones equivalentes de una base de un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo K; vamos ahora a demostrar su existencia.

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita sobre K no reducido a $\{\vec{0}\}$, admite por definición un sistema generador finito $G=\{\vec{g}_1,\vec{g}_2,\dots,\vec{g}_p\}$ de p elementos que se puede suponer no nulos según la observación hecha en el apartado 5, b). Hay, pues, partes de G que son libres (por ejemplo, $\{\vec{g}_1\}$) sea L una de ellas; por tanto, $L\subset G$.

Si L engendra E, es una base (sistema generador libre). Si L no engendra E, existe $\vec{g}_{i_1}$ de $G-L$ que no es combinación lineal de los elementos de L; pongamos $L_0=L$, y $L_1=L_0\cup\{\vec{g}_{i_1}\}$; L_1 es libre, si no (corolario del teorema 1, 7) $\vec{g}_{i_1}$ sería combinación lineal de L_0, luego $L=L_0\subset L_1\subset G$; $L_1\neq L_0$

Si L_1 engendra E, L_1 es una base. Si L_1 no engendra E, podemos empezar de nuevo el razonamiento: existe $\vec{g}_{i_2}$ que pertenece a $G-L_1$, $L_2=L_1\cup\{\vec{g}_{i_2}\}$ es libre y $L_0\subset L_1\subset L_2\subset G$; con las dos primeras inclusiones estrictas, podemos construir así una sucesión finita estrictamente creciente de sistemas libres de E, contenidos en G

$$L=L_0\subset L_1\subset L_2\subset\dots\subset L_k\subset G.$$

Al ser G un sistema generador finito, existirá m tal que L_{m-1} sea un sistema libre que no engendre E y L_m un sistema libre que engendra E, L_m será, por tanto, una base de E; luego:

TEOREMA 4. - "Todo espacio vectorial E de dimensión finita, no reducido a $\{\vec{0}\}$, admite una base; de una manera más precisa si G es un sistema generador de E y L un sistema libre de E contenido en G, existe una base B de E tal que $L\subset B\subset G$"

b) Consideremos ahora un espacio vectorial E no reducido a $\{\vec{0}\}$, un sistema libre L y un sistema generador G, los dos cualesquiera. $G\cup L$ engendra E ya que G por sí solo lo engendra y $G\subset G\cup L$;

Todos estos conjuntos al ser finitos, existe un subconjunto H de G tal que $B = L \cup H$; en consecuencia:

COROLARIO.- "Si L y G son, respectivamente, un sistema libre y un sistema generador de E, existe un subconjunto H de G tal que $L \cup H$ sea una base de E."

Este resultado se conoce con el nombre de "teorema de la base incompleta": la parte libre L se ha "completado" con algunos elementos de G; también se le conoce con el nombre de "teorema del cambio", pues gracias al teorema 2 del apartado 7, se puede sustituir a $G = \{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots \vec{g}_p\}$ por el sistema generador $G' = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m, \vec{g}_{m+1}, \dots, \vec{g}_p\}$ conteniendo L obtenida "cambiando" m elementos de G por los m elementos del sistema libre L.

OBSERVACION: Los teoremas 3 y 4 también se verifican para un espacio vectorial de dimensión infinita

10. Dimensión de un espacio vectorial

a) Hemos visto en el teorema 4 (ap. 9) que todo espacio vectorial E de dimensión finita admite al menos una base finita B. Sea n el número de sus elementos. Sea B' otra base que tenga n' elementos. B' es un sistema libre de E y sus elementos son combinaciones lineales de los elementos de B; por tanto por el teorema 2 (ap. 8) $n' \leq n$; igualmente razonando al revés $n \leq n'$. Luego:

TEOREMA 5 y DEFINICION.- "En un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo K, todas las bases tienen el mismo número de elementos. Este número común se llama la dimensión del espacio vectorial E sobre el cuerpo K, se le designa por $\dim_K E$."

Por ejemplo, K^n espacio vectorial sobre K, tiene una base con n elementos; por ejemplo, su base canónica, luego es de dimensión n sobre K.

Así está justificada a posteriori la calificación de "espacio vectorial de dimensión finita".

Como para la independencia lineal, la noción de dimensión depende no solamente del conjunto E, sino también del cuerpo de base del espacio vectorial (ver ejercicio a continuación). Si no es posible ninguna confusión sobre el cuerpo de base, se representará la dimensión de E por $\dim E$.

$\{\vec{0}\}$ es un espacio vectorial con un solo elemento cualquiera que sea el cuerpo de base, se pondrá por definición $\dim \{\vec{0}\} = 0$.

b) De la definición de la dimensión y del corolario del teorema 2 (ap. 8) tenemos los resultados siguientes:

TEOREMA 7.- "En un espacio vectorial E de dimensión n sobre K:

1. Todo sistema libre tiene a lo sumo n elementos.
2. Todo sistema ... "

COROLARIO.- "Todo sistema B de un espacio vectorial E de dimensión n sobre K que posee dos de las tres propiedades siguientes ($n > 0$):

1. B tiene n elementos
2. B es libre
3. B es sistema generador de E.

es una base de E."

2 y 3, dan la definición de base.
3 y 1, implican que B es libre, si no se podría extraer $B' \subset B$ (ap. 9, teorema 4) que sería una base de E y se tendría $\dim E < n$.

1 y 2, implica que B engendra E, si no existiría $\vec{x}$ tal que $B \cup \{\vec{x}\}$ sería libre (corolario del th. 1, ap. 7) y habría entonces un sistema libre con $n+1$ elementos, lo que es imposible.

Ejemplos y ejercicios: Queysanne. Pag. 298

1. Consideremos el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos, podemos considerarlo como un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, tendrá por base $1 = (1,0)$ é $i = (0,1)$, ó todo par de números complejos linealmente independientes en $\mathbb{C}$ esp. vect. sobre $\mathbb{R}$, es decir, tal que $z_1/z_2 \notin \mathbb{R}$; entonces tendremos de un modo único $z = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

Se puede también considerar el cuerpo $\mathbb{C}$ como espacio vectorial sobre sí mismo; tiene por base todo sistema de un elemento $\{1\}$, por ejemplo, ó $\{z_0\}$ si $z_0 \neq 0$ y para todo z de $\mathbb{C}$, $z = \alpha z_0$ con $\alpha \in \mathbb{C}$

Por tanto

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2 \quad ; \quad \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$$

11. Dimensión de un subespacio vectorial de E

a) Sea E un espacio vectorial de dimensión finita $n>0$ sobre K (por tanto, $E \neq \{\vec{0}\}$) y F un subespacio de E, distinto de $\{\vec{0}\}$. Sabiendo que todo sistema libre L de F es un sistema libre de E (ver como ejercicio), tiene por tanto a lo sumo n elementos; L tiene al menos un elemento (que es no nulo), puesto que $F \neq \{\vec{0}\}$; hay, pues, sistemas libres en F, sea p el número de elementos de un sistema libre maximal de F: es una base de F y $1 \leq p \leq n$; si $p = n$ es una base de E y $E = F$. Si $F = \{\vec{0}\}$ $\dim_K F = 0$. Finalmente si $E = \{\vec{0}\}$, se tiene igualmente que $F = \{\vec{0}\}$, de donde:

TEOREMA 8.- "Si F es un subespacio vectorial del espacio vectorial E de dimensión n sobre K, F es de dimensión finita sobre K y $\dim_K F \leq \dim_K E$

Recíprocamente toda parte libre con p elementos de E engendra un subespacio vectorial de E, de dimensión p. Finalmente si $\dim_K F = \dim_K E \Rightarrow F = E$."

b) Un subespacio F de dimensión 1 se llama una recta que pasa por $\vec{O}$ de E, si $\vec{a}$ es un elemento no nulo de F, F está descrito por los $\vec{x}$ tales que $\vec{x} = \alpha \cdot \vec{a} \quad \forall \alpha \in K$.

Un subespacio F de dimensión 2 se llama un plano que pasa por $\vec{O}$ de E, si $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ es una base de F, F está descrito por los $\vec{x}$ tales que $\vec{x} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in K$

Un subespacio F de dimensión $p > 2$ de base $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p\}$ está descrito por los $\vec{x}$ tales que $\vec{x} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{a}_i \quad \forall \alpha_i \in K \quad i = 1 \dots p$. Si $p = n-1$ se dice que F es un hiperplano que pasa por $\vec{O}$ de E.

OBSERVACION: Naturalmente todos los subespacios vectoriales de E contienen a $\vec{O}$; se les dice recta, plano, hiperplano, que pasan por $\vec{O}$ para evitar toda confusión con recta, plano, hiperplano del espacio afín asociado al espacio vectorial E. Por ejemplo, en el espacio afín $\mathbb{R}^3$ hay rectas y planos, que no pasan por O.

c) Consideremos un subespacio propio F del espacio vectorial E, sea $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p\}$ $(0 < p < n)$ una base de F, podemos completar esta base con elementos de un sistema generador de E para obtener una base de E; como una base de E tiene n elementos será necesario $n-p$ elementos $\vec{b}_{p+1}, \vec{b}_{p+2}, \dots, \vec{b}_n$. Para todo $\vec{x}$ de E existirá, pues, una familia única de escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p, \beta_{p+1}, \dots, \beta_n$ tales que $\vec{x} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_p \vec{a}_p + \beta_{p+1} \vec{b}_{p+1} + \dots + \beta_n \vec{b}_n$

Ahora bien, $\{\vec{b}_{p+1}, \vec{b}_{p+2}, \dots, \vec{b}_n\}$ subfamilia de una familia libre de E es libre y engendra un subespacio vectorial G de dimensión $n-p$, pues su base tiene $n-p$ elementos. Por otra parte, escribiendo $\vec{y} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_p \vec{a}_p \ ; \ \vec{z} = \beta_{p+1} \vec{b}_{p+1} + \dots + \beta_n \vec{b}_n$

vemos que tenemos de un modo único $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, con $\vec{y} \in F$, $\vec{z} \in G$ por tanto, G es un subespacio suplementario de F, de donde:

TEOREMA 9. - "En un espacio vectorial E de dimensión finita sobre K todo subespacio vectorial F de E admite al menos un suplementario G respecto a E y $E = F \oplus G \Rightarrow \dim E = \dim F + \dim G$"

Este resultado es, en efecto, válido para $F = \{\vec{o}\}$ (resp. E), G es entonces E (resp. $\{\vec{o}\}$). Observemos que F puede tener varios suplementarios, puede incluso tener infinitos si K es infinito.

COROLARIO Y DEFINICION. - "En un espacio vectorial E de dimensión finita sobre K todos los suplementarios de un mismo subespacio F de E tienen igual dimensión, se le llama la codimensión de F respecto de E y se la asigna codim F"

12. Rango de un sistema de vectores de un espacio vectorial *

DEFINICION. – "Se llama rango de un sistema S de vectores de un espacio vectorial E sobre K, la dimensión del subespacio F, supuesto de dimensión finita, engendrado por este sistema de vectores. Se le representa $rg(S)$".

Dado $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots \vec{x}_p\}$ que engendra F, el rango de S será el número de elementos de una parte maximal libre extraída de S, por tanto:

"El rango de un sistema finito de vectores es el número máximo de vectores linealmente independientes extraídos de S".

Si $\dim E = n$, se tiene evidentemente $rg\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\} \leq \inf(n, p)$

Vamos a indicar un método para determinar el rango de S, en un espacio de E de dimensión n sobre K, si conocemos las coordenadas de los p vectores respecto a una base de E, sea

$$\vec{x}_i = \alpha_{i1}\vec{a}_1 + \alpha_{i2}\vec{a}_2 + \dots + \alpha_{ij}\vec{a}_j + \dots + \alpha_{in}\vec{a}_n$$

será lo mismo que estudiar los vectores $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ij}, \dots, \alpha_{in})$ de K^n. Esto se basa en dos propiedades muy simples que no vamos a demostrar.

PROPIEDAD 1. – "Si tenemos p vectores $\vec{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\vec{a}_j$ de un espacio vectorial E de dimensión n sobre K $(p \leq n)$, si $(\forall_j \text{ indice} / j < i \Rightarrow \alpha_{ij} = 0)$ y $(\forall i = 1 \dots p)\ \alpha_{ii} \neq 0$ los p vectores $(\vec{x}_i)$ son independientes"

PROPIEDAD 2. – "El sistema $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ y el sistema S' obtenido sustituyendo en S, $\vec{x}_i$ por $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \vec{x}_j$ con $\lambda_i \neq 0$ tiene el mismo rango."

El método consiste en utilizar la propiedad (2) efectuando combinaciones sucesivas para obtener un sistema que engendre el mismo subespacio que S y cuyos vectores no nulos posean la propiedad (1). Veámoslo, más claramente, con un ejemplo.

EJEMPLOS

1. Sean los tres vectores de $\mathbb{R}^3$, $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ dados por sus coordenadas en una base $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$

$$(S) \quad \begin{array}{ccc} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 8 \end{array} \quad \text{es decir} \begin{cases} \alpha_{11} = 2 & \alpha_{21} = -1 & \alpha_{31} = 4 \\ \alpha_{12} = 3 & \alpha_{22} = 2 & \alpha_{32} = -3 \\ \alpha_{13} = 5 & \alpha_{23} = -3 & \alpha_{33} = 8 \end{cases}$$

Escojamos uno de los vectores cuya primera coordenada es no nula (si las tres primeras coordenadas fueran nulas se operaría en el subespacio engendrado por $\vec{a}_2$ y $\vec{a}_3$ al que pertenecería $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ y $\vec{x}_3$)

Tomemos $\vec{x}_1$ y formemos $S' = \{\vec{x}_1, \vec{x}'_2, \vec{x}'_3\}$ con $\vec{x}'_2 = \lambda\vec{x}_1 + \mu\vec{x}_2$ y $\vec{x}'_3 = \lambda'\vec{x}_1 + \mu'\vec{x}_3$