2

APLICACIONES LINEALES

1. Definiciones. Ejemplos

DEFINICION. — "Dados dos espacios vectoriales E y F sobre el mismo cuerpo conmutativo K, se llama aplicación lineal de E en F, toda aplicación f de E en F que verifica las dos condiciones siguientes

(1) $\quad \forall \vec{x} \in E, \forall \vec{y} \in E \quad ; \quad f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$

(2) $\quad \forall \vec{x} \in E, \forall \alpha \in K \quad , \quad f(\alpha \vec{x}) = \alpha f(\vec{x})$ "

A las aplicaciones lineales, también se les llama homomorfismos entre espacios vectoriales. A (1) y (2) se llaman, respectivamente, primera y segunda propiedades de linealidad. Si $E = F$ se dice que f es un endomorfismo del espacio vectorial E, se dice también que es un operador lineal operando en E. Si f va de E en K se llama forma lineal $f: E \to K$

Si la aplicación lineal $f: E \longrightarrow F$ es:
- a) inyectiva se llama monomorfismo.
- b) suprayectiva " epimorfismo.
- c) biyectiva " isomorfismo.

si además de ser f biyectiva, $E = F$, f es un automorfismo del espacio vectorial E, se dice también que f es un operador lineal regular operando en E.

Al conjunto de las aplicaciones lineales de E en F, se representa por $Hom_K(E,F)$ ó $\mathcal{L}_K(E,F)$. Al conjunto de los endomorfismos del espacio vectorial E, por $End_K(E)$ ó $\mathcal{L}_K(E)$. Y al conjunto de los automorfismos de E por $GL_K(E)$. Si no cabe ninguna confusión sobre el cuerpo de base K, se emplean las notaciones $\mathcal{L}(E,F)$; $\mathcal{L}(E)$; $GL(E)$.

Ejemplos y Ejercicios

1. Si $E = E_1 \times E_2$ las aplicaciones pr_1 y pr_2 definidas por
$pr_1(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \vec{x}_1 \quad , \quad pr_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \vec{x}_2$

2. Sea $f: E_1 \times E_2 \longrightarrow E_1 \oplus E_2$ definida de la siguiente manera
$f(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$. Demostrar que es un isomorfismo; luego $E_1 \times E_2$ es isomorfo a $E_1 \oplus E_2$

OBSERVACION: Si dos espacios vectoriales E y F son isomorfos (se denota $E \cong F$), se puede decir que los

3. Si se identifica $E_1 \times E_2$ con $E_1 \oplus E_2$ (por ser isomorfos). Las aplicaciones pr_1 y pr_2
$pr_1 : E_1 \oplus E_2 \longrightarrow E_1 \oplus E_2 \;/\; pr_1(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \vec{x}_1$ son endomorfismos de E, siendo $E = E_1 \oplus E_2$. Consideremos $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ ó $E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n = E$ $(\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_n \,;\, \vec{x} \in E,\ \vec{x}_i \in E_i)$ se puede probar que $f_i : E \longrightarrow E$ tal que $\vec{x} \longrightarrow \vec{x}_i = f_i(\vec{x})$ es un endomorfismo. Comprobar que $(f_i) \circ (f_i) = f_i$. De manera general se llama <u>proyector</u> todo endomorfismo de E que verifique $f \circ f = f$.

4. Demostrar que los espacios $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$ son isomorfos.

5. Sea $f : E \rightarrow E$ definida por: $f(\vec{x}) = \alpha \vec{x}$, siendo $\alpha \in K$ fijo no nulo. Demostrar que es un automorfismo de E sobre K. Se le llama <u>homotecia</u> de razón $\alpha \neq 0$.

6. Demostrar que si E_1 y E_2 dos espacios vectoriales sobre K; E_1 es isomorfo a $E_1 \times \{\vec{0}\}$ descrito por $(\vec{x}_1, \vec{0})$

7. Sea E un espacio vectorial E de dimensión n sobre K. Sea $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ una base de E; $\forall \vec{x} \in E$, $\vec{x} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$. Sea la aplicación $f : E \longrightarrow K^n$ definida por $\vec{x} \longrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\vec{x})$. Demostrar que f es un isomorfismo. (Se podrá decir una vez resuelto que existe una sola estructura de espacio vectorial de dimensión n sobre K; la de K^n}; y por lo tanto <u>dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre el mismo cuerpo K son isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión respecto a K</u>)

—— . ——

<u>2. Propiedades fundamentales de las aplicaciones lineales</u>

<u>TEOREMA 1</u>.- " Sea f un aplicación lineal de E en F; se verifica:

(a) La imagen del vector nulo de E es el vector nulo de F: $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$

(b) $\forall \vec{x} \in E$; $f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$

(c) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$; $f(\vec{x} - \vec{y}) = f(\vec{x}) - f(\vec{y})$ "

<u>Demostración</u>

(a) $\vec{x} + \vec{0}_E = \vec{0}_E + \vec{x} = \vec{x} \Rightarrow f(\vec{x} + \vec{0}_E) = f(\vec{x}) + f(\vec{0}_E) = f(\vec{0}_E) + f(\vec{x}) = f(\vec{x})$
es decir $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$

(b) $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}_E \Rightarrow f[\vec{x} + (-\vec{x})] = f(\vec{0}_E) \Rightarrow f(\vec{x}) + f(-\vec{x}) = \vec{0}_F \Rightarrow$

$\Rightarrow f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$

(c) $f(\vec{x} - \vec{y}) = f(\vec{x} + (-\vec{y})) = \underline{f(\vec{x})} + \underline{f(-\vec{y})} = f(\vec{x}) - f(\vec{y})$

<u>TEOREMA 2</u>.- "Para que una aplicación f entre dos espacios vectoriales E y F sobre un mismo cuerpo conmutativo K sea lineal, es necesario y suficiente que

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E \text{ y } \forall \alpha, \beta \in K ; \quad f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y})"$$

C. necesaria: Si $\vec{x}, \vec{y} \in E \Rightarrow \alpha\vec{x}, \beta\vec{y} \in E$. Como f es lineal, se verificará

$$f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = f(\alpha\vec{x}) + f(\beta\vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y})$$

C. suficiente:

(1) Haciendo $\alpha = \beta = 1$ $\quad f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$

(2) " $\beta = 0$ $\quad f(\alpha\vec{x}) = \alpha f(\vec{x})$

<u>DEFINICION y TEOREMA 3</u> — "Sea f una aplicación de E en F, y A un subconjunto de E, y B un subconjunto de F, se llama <u>conjunto imagen de A por f</u> y se escribe <u>$f(A)$</u> el subconjunto de F que verifica $f(A) = \{ f(x) \,/\, x \in A \}$; de otra manera $f(A)$ está descrito por $f(\vec{x})$ cuando x describe A.

Se llama imagen recíproca de B por f y se escribe $f^{-1}(B)$ al subconjunto de E definido por: $f^{-1}(B) = \{ \vec{x} \,/\, f(\vec{x}) \in B \}$." Ejemplos

"(a) Si A es un subespacio vectorial de E, $f(A)$ es un subespacio vectorial de F.

(b) Si B es un subespacio vectorial de F, $f^{-1}(B)$ es un subespacio vectorial de E."

<u>Demostración:</u>

Sea A un subespacio de E; sean $\vec{x}'$ e $\vec{y}'$ dos elementos cualesquiera de $f(A) \Rightarrow$ existen $\vec{x}$ e $\vec{y}$ de A tales que $\vec{x}' = f(\vec{x})$; $\vec{y}' = f(\vec{y})$

$$\begin{cases} \vec{x}' + \vec{y}' = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = f(\vec{x} + \vec{y}) \\ \alpha \cdot \vec{x}' = \alpha \cdot f(\vec{x}) = f(\alpha\vec{x}) \end{cases}$$

$\vec{x} + \vec{y}$ y $\alpha\vec{x}$ sí pertenecen a A (por ser subespacio); $\vec{x}' + \vec{y}'$ y $\alpha\vec{x}'$ pertenecerán a $f(A)$ por definición, por tanto, es un subesp[illegible] de F

Sea B un subespacio de F; y $\vec{x}$ e $\vec{y}$ dos elementos cualesquiera de $f^{-1}(B)$, por lo tanto $f(\vec{x})$ y $f(\vec{y})$ pertenecen a B, de donde para todo α de K.

$$\left.\begin{array}{l} f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = f(\vec{x}+\vec{y}) \quad \in B \\ \alpha f(\vec{x}) = f(\alpha\vec{x}) \qquad \in B \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{x}+\vec{y} \in f^{-1}(B) \\ \alpha\vec{x} \in f^{-1}(B) \end{array}\right.$$

por tanto $f^{-1}(B)$ es un subespacio de E.

3. Núcleo e imagen de una aplicación lineal

DEFINICION. — "Si f es una aplicación lineal de E en F, como $\{\vec{0}\}$ es un subespacio vectorial (impropio) de F, $f^{-1}(\vec{0})$ es un subespacio vectorial de E y se llama núcleo de la aplicación lineal f y se le representa **Ker f**, así pues $\mathrm{Ker} f = \{\vec{x} \in E / f(\vec{x}) = \vec{0} \in F\} = f^{-1}(\vec{0})$.

Como E es un subespacio vectorial (impropio) de E, $f(E)$ es un subespacio vectorial de F que se le llama imagen de la aplicación lineal f y se representa por **Im f**; así pues,

$\mathrm{Im} f = \{\vec{x}' \in F / \exists \vec{x} \in E,\ f(\vec{x}) = \vec{x}'\} = f(E)$. Resumiendo:

$$f \in \mathcal{L}(E,F), \quad \mathrm{Ker} f = f^{-1}(\vec{0}) \subset E, \quad \mathrm{Im} f = f(E) \subset F \text{ "}$$

De la propia definición, se deduce inmediatamente el siguiente corolario.

COROLARIO. — "Si f es aplicación lineal de E en F:

1. f es inyectiva (ó monomorfismo) si y sólo si $\mathrm{Ker} f = \{\vec{0}\}$
2. f es suprayectiva (ó epimorfismo) si y sólo si $\mathrm{Im} f = F$ "

Para 1: a) Si f es inyectiva, supongamos $\vec{x} \in \mathrm{Ker} f \Rightarrow f(\vec{x}) = \vec{0} = f(\vec{0}) \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$

b) Si $\mathrm{Ker} f = \{\vec{0}\}$, $f(\vec{x}) = f(\vec{y}) \Rightarrow f(\vec{x}-\vec{y}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}-\vec{y} \in \mathrm{Ker} f \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{x}-\vec{y} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}$$

Para 2 es simplemente el enunciado de la definición de una aplicación suprayectiva.

Ejercicios.

1. Sea $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = 2x - 3y$. Hallar el núcleo y la imagen.
2. " $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ " " $f(x,y) = (y, x)$. "
3. Hallar los núcleos e imágenes de los ejercicios 1 y 4.

4. Imágenes de partes de E. Aplicaciones

Sea f una aplicación lineal de E en F, y una combinación lineal de p elementos de E: $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p$ tendremos

$$f(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_p \vec{x}_p) = f(\alpha_1 \vec{x}_1) + f(\alpha_2 \vec{x}_2) + \dots + f(\alpha_p \vec{x}_p) = \alpha_1 f(\vec{x}_1) + \alpha_2 f(\vec{x}_2) + \dots + \alpha_p f(\vec{x}_p)$$

ó escrito con sumatorio $f\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{p} f(\alpha_i \vec{x}_i)$ (primera propiedad de linealidad)

$$= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(\vec{x}_i) \quad \text{(segunda propiedad de linealidad)}$$

Estos resultados van a servirnos para poder asegurar lo siguiente:

TEOREMA 4. - "Si f es una aplicación lineal de E en F, si G es un sistema generador de E, entonces $f(G)$ es sistema generador de $\mathrm{Im} f$"

Sea $G = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ y $\vec{x}'$ un elemento cualquiera de $\mathrm{Im} f$, por lo tanto (por def. de $\mathrm{Im} f$) existe $\vec{x} \in E$ tal que $\vec{x}' = f(\vec{x})$. Por otra parte, $\vec{x}$ es una combinación lineal de elementos de G y

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{x}_i \Rightarrow \vec{x}' = f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(\vec{x}_i)$$

por tanto, $\vec{x}' = f(\vec{x})$ es una combinación lineal de elementos de $f(G) = \{f(\vec{x}_1) \dots f(\vec{x}_p)\}$

En particular, si $f(\vec{x}_i) = \vec{0}$ para todo $\vec{x}_i$ de G, $f(\vec{x}) = \vec{0}$ para todo $\vec{x}$ de E: esta observación, muy útil, se conoce con el nombre de principio de prolongación de igualdades lineales, porque si $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ tales que $f(\vec{x}) = g(\vec{x})$ $\forall \vec{x} \in G$ se deduce que $f = g$.

Ejercicios:

1. Si f es una aplicación lineal de E en F, demostrar que la imagen de un sistema de vectores A ligado de E, es un sistema ligado $f(A)$ de F. Es decir si $A = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots \vec{x}_p\} \subset E$ ligado $\Rightarrow f(A) = \{f(\vec{x}_1), f(\vec{x}_2), \dots, f(\vec{x}_p)\} \subset F$ también ligado.

Existe p. ej. $\vec{x}_p$ es combinación lineal de los restantes $A - \{\vec{x}_p\}$ por tanto $f(\vec{x}_p)$ será " " de $f(A) - \{f(\vec{x}_p)\} \Rightarrow f(A)$ ligado.

2. Si f es una aplicación lineal de E en F y A un sistema de E tal que $f(A)$ sea libre en F,

OBSERVACION: La imagen de un sistema libre de E no es en general un sistema libre de F; en particular, la imagen de una base de E no es en general una base de $\mathrm{Im}\, f$.

3. Si f es una aplicación lineal de E en F, demostrar que las dos propiedades siguientes son equivalentes:
a) f es inyectiva
b) Para todo sistema libre L de E, $f(L)$ es un sistema libre de F

---

a) $\Rightarrow$ b) Sup. f inyectiva y sea $L = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots \vec{x}_m\}$. Hemos de demostrar que siendo L libre, entonces $f(L) = \{f(\vec{x}_1), f(\vec{x}_2), \dots f(\vec{x}_m)\}$ también lo es.

$$L \text{ libre} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$$

Formemos una combinación lineal de elementos de $f(L)$ igualada a cero:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(\vec{x}_i) = \vec{0} \quad \text{que se puede escribir} \quad f\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{x}_i\right) = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{x}_i \in \mathrm{Ker}\, f \quad \text{pero} \quad \mathrm{Ker}\, f = \{\vec{0}\} \text{ por ser } f \text{ inyectiva} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{x}_i = \vec{0} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$ por ser L libre.

b) $\Rightarrow$ a) Consideremos el sistema $L = \{\vec{x}_1\}$ que es libre $\xRightarrow{\text{con } \vec{x}_1 \neq \vec{0}}$ $f(L) = \{f(\vec{x}_1)\}$ por hipótesis también debe ser libre, por lo tanto $f(\vec{x}_1) \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{x}_1 \notin \mathrm{Ker} f \Rightarrow \mathrm{Ker} f = \{\vec{0}\} \Rightarrow f$ inyectiva.

---

4. Sea f una aplicación lineal de E en F; B una base de E. Ver en qué casos $f(B)$ también sea base de F.

---

5. Rango de una aplicación lineal

a) **TEOREMA 5 y DEFINICION**.— "Si f es una aplicación lineal de un espacio vectorial E de dimensión finita sobre K en un espacio vectorial F sobre K, $\mathrm{Im}\, f$ es de dimensión finita sobre K y $\dim_K \mathrm{Im}\, f \leq \dim_K E$.

La dimensión de $\mathrm{Im} f = f(E)$ es el rango de la aplicación f; se representa por $rg(f)$; además,
$$\boxed{rg(f) = \dim_K E - \dim_K \mathrm{Ker} f} \quad \text{ó bien} \quad \boxed{\dim_K E = \dim_K \mathrm{Ker} f + \dim_K \mathrm{Im} f}$$

Si $\dim_K E = n$, toda base B de E tiene n elementos, es un sistema generador de E; por tanto, $f(B)$ es un sistema generador de $\mathrm{Im} f$ que tiene a lo sumo n elementos. Por tanto, $\mathrm{Im} f$ es de dimensión finita y toda base de $\mathrm{Im} f$ tiene r elementos, con $r \leq n$.

Pasemos a demostrar que $\dim E = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$: Sea $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p\}$ una base de $\mathrm{Ker} f$, y $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_r\}$ una base de $\mathrm{Im} f$.

Pero $\forall i = 1 \dots r$, como $\vec{b}_i \in \mathrm{Im} f$ existe $\vec{e}_i \in E \,/\, f(\vec{e}_i) = \vec{b}_i$, $i = 1 \dots r$

Vamos a probar que $B = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_r\}$ es una base de E, con $p + r$ elementos, lo que indica que $p + r = n$.

1. Es un sistema generador:

$$\forall \vec{x} \in E \Rightarrow f(\vec{x}) \in \mathrm{Im} f \Rightarrow f(\vec{x}) = \alpha_1 \vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2 + \dots + \alpha_r \vec{b}_r =$$

$$= \alpha_1 f(\vec{e}_1) + \alpha_2 f(\vec{e}_2) + \dots + \alpha_r f(\vec{e}_r) = f(\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_r \vec{e}_r)$$

luego $f(\vec{x}) - f\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \vec{e}_i\right) = \vec{0} \Rightarrow f\left(\vec{x} - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \vec{e}_i\right) = \vec{0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{x} - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \vec{e}_i \in \mathrm{Ker} f \Rightarrow \vec{x} - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \vec{e}_i = \sum_{j=1}^{p} \beta_j \vec{a}_j \Rightarrow$$

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{p} \beta_j \vec{a}_j + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \vec{e}_i = \beta_1 \vec{a}_1 + \dots + \beta_p \vec{a}_p + \alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_r \vec{e}_r$$

Es decir $\vec{x}$ es combinación de los elementos de $B \Rightarrow B$ es sistema generador

2. Es sistema libre:

Supongamos $\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_p \vec{a}_p + \lambda_{p+1} \vec{e}_1 + \dots + \lambda_{p+r} \vec{e}_r = \vec{0}$ luego

$$f(\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_p \vec{a}_p + \lambda_{p+1} \vec{e}_1 + \dots + \lambda_{p+r} \vec{e}_r) = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 f(\vec{a}_1) + \dots + \lambda_p f(\vec{a}_p) + \lambda_{p+1} f(\vec{e}_1) + \dots + \lambda_{p+r} f(\vec{e}_r) = \vec{0}$$

Como $\{\vec{a}_i\}$ $i = 1 \dots p$ es una base del núcleo $f(\vec{a}_i) = \vec{0}$ $\forall i = 1 \dots p$ quedando

$$\lambda_{p+1} f(\vec{e}_1) + \dots + \lambda_{p+r} f(\vec{e}_r) = \vec{0} \Rightarrow \lambda_{p+1} \vec{b}_1 + \dots + \lambda_{p+r} \vec{b}_r = \vec{0}$$

y como $\{\vec{b}_j\}$ $j = 1 \dots r$ es una base de $\mathrm{Im} f \Rightarrow \lambda_{p+1} = \dots = \lambda_{p+r} = 0$ que sustituyendo en el principio $\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_p \vec{a}_p + \underbrace{\lambda_{p+1} \vec{e}_1 + \dots + \lambda_{p+r} \vec{e}_r}_{\vec{0}} = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_p \vec{a}_p = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ por ser $\{\vec{a}_i\}$ $i = 1 \dots p$ base del núcleo.

Se ha de observar que, por lo tanto, si $n = \dim_K E$ y $p = \dim_K F$ y $r = rg(f)$; $r \leq n$ como hemos visto, y al ser $\mathrm{Im} f$ un subespacio de F $r \leq p$, es decir $r \leq \inf(n, p)$.

Ejercicios

1. Sea $B = \{\vec{a}_1, \ldots \vec{a}_n\}$ una base de E, f una aplicación de E en F lineal de rango r (por lo tanto $\dim_K \mathrm{Ker} f = n - r$). Demostrar que si $\{\vec{a}_{r+1}, \ldots, \vec{a}_n\}$ es una base del núcleo, entonces $\{f(\vec{a}_1), f(\vec{a}_2), \ldots, f(\vec{a}_r)\}$ es una base de $\mathrm{Im} f$.

~~Sistema generador~~ Sistema libre: $\alpha_1 f(\vec{a}_1) + \alpha_2 f(\vec{a}_2) + \cdots + \alpha_r f(\vec{a}_r) = \vec{0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \cdots + \alpha_r \vec{a}_r) = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 \vec{a}_1 + \cdots + \alpha_r \vec{a}_r \in \mathrm{Ker} f \Rightarrow$$

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \cdots + \alpha_r \vec{a}_r = \beta_1 \vec{a}_{r+1} + \cdots + \beta_{n-r} \vec{a}_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \vec{a}_1 + \cdots + \alpha_r \vec{a}_r + (-\beta_1)\vec{a}_{r+1} + \cdots + (-\beta_{n-r})\vec{a}_n = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_r = \beta_1 = \cdots = \beta_{n-r} = 0 \text{ por ser } B \text{ base } \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$$

Sistema generador: Como: $\left.\begin{array}{l} 1)\ \dim \mathrm{Im} f = r \\ 2)\ \{f(\vec{a}_1) \ldots f(\vec{a}_r)\} \text{ es libre con } r \text{ elementos} \end{array}\right\} \Rightarrow \{f(\vec{a}_1) \ldots f(\vec{a}_r)\}$ es sistema generador.

---

2. Ver si las siguientes aplicaciones son lineales, y ~~dar~~ si son inyectivas, etc.; dar el nombre específico. Calcular el núcleo y la imagen donde proceda, hallar el rango de la aplicación y dar bases para el núcleo y la imagen.

a) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = 3x$

b) g " $g(x) = x^5$

c) h " $h(x) = x + 5$

d) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x,y) = 4x$

e) $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $g(x,y) = x - 3y$

f) $h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $h(x,y) = 2xy$

g) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $f(x,y) = (2x - y, x + y)$

h) $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $g(x,y) = (y, x)$

i) $h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $h(x,y) = (3x, 3x + y)$

j) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$; $f(x,y) = (x + y, x, x - y)$
