Breve historia de los Números Complejos

Teniendo conocimiento de cómo la raza humana ha adquirido su sabiduría sobre ciertos hechos y conceptos, estaremos en mejor disposición de juzgar cómo los niños adquieren tal conocimiento.
George Pólya (1887-1985)

Primeras referencias: SI-SXII

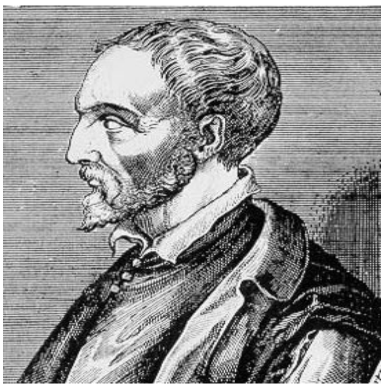
La primera referencia escrita de la raíz cuadrada de un número negativo la encontramos en la obra *Stereometría* de **Herón de Alejandría** (Greciaaprox. 10-75) alrededor de la mitad del siglo I. Es este trabajo comparece la operación $\sqrt{81-144}$ aunque es tomada como $\sqrt{144-81}$, no sabiéndose si este error es debido al propio Herón o al personal encargado de transcribirlo.

La siguiente referencia sobre esta cuestión se data en el año 275 en la obra de **Diophantus** (aprox. 200-284) *Arithmetica*. En su intento de cálculo de los lados de un triángulo rectángulo de perímetro 12 y área 7, Diophantus planteó resolver la ecuación $336x^2+24=172x$, ecuación de raíces complejas como puede ser comprobado fácilmente.

Son los matemáticos hindúes los que dan las primeras explicaciones a este tipo de problemas. **Mahavira**, alrededor del año 850, comenta en su tratado de los números negativos que *"como en la naturaleza de las cosas una cantidad negativa no es un cuadrado, por tanto no puede tener raíz cuadrada"*. Alrededor de 1150 es **Bhaskara** quien lo describe de la siguiente forma:

> *El cuadrado de un número, positivo o negativo, es positivo; la raíz cuadrada de un número positivo tiene dos valores, uno positivo y otro negativo; no existe raíz cuadrada de un número negativo ya que un número negativo no es un cuadrado.*

Primeros estudios: SXVI



J. Cardan (1501 - 1576)

En 1545, **Jerome Cardan** (Italia, 1501-1576), un matemático, físico y filósofo italiano, publica *"Ars Magna"* (El Gran Arte) en el cual describe un método para resolver ecuaciones algebraicas de grado tres y cuatro. Esta obra se convertía así en el mayor tratado de álgebra desde los Babilónicos, 3000 años antes, que dedujeron cómo resolver la ecuación cuadrática.

Un problema planteado por Cardan en su trabajo es el siguiente:

> *Si alguien te pide dividir 10 en dos partes cuyos producto sea... 40, es evidente que esta cuestión es imposible. No obstante, nosotros la resolvemos de la siguiente forma.*

Cardan aplicaba entonces su algoritmo al sistema de ecuaciones $x+y=10$, $xy=40$ dando como soluciones $5+\sqrt{-15}$ y $5-\sqrt{-15}$. Por multiplicación probaba Cardan que el producto era 40. Esta es la primera constancia escrita de la raíz de un número negativo y de su manejo algebraico.

Cardan también tropieza con estas raíces en las soluciones que presenta de la ecuación cúbica $x^3 = ax+b$. Tales soluciones vienen dadas por:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}.$$

Para la ecuación $x^3 = 15x+4$ esta fórmula da como solución $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$, la cual Cardan dió por válida. Como esta ecuación tiene las raíces 4, $-2+\sqrt{3}$ y $-2-\sqrt{3}$, interesaba la relación con las propuestas por la fórmula de Cardan. Fué el ingeniero hidraúlico **Rafael Bombelli** (Italia, 1526 - 1572), unos treinta años después de la publicación de la obra de Cardan, quien introdujo un razonamiento que el mismo catalogó de un tanto "salvaje". Planteó que como $-2+\sqrt{-121}$ y $-2-\sqrt{-121}$ sólo se diferencian en un signo, lo mismo debía suceder con sus raíces cúbicas. Así escribía

$$\sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}} = a+\sqrt{-b} \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{-2-\sqrt{-121}} = a-\sqrt{-b},$$

donde por cálculo directo obtenía que $a=2$ y $b=1$, luego

$$\sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{-2-\sqrt{-121}} = (2+\sqrt{-1}) + (2+\sqrt{-1}) = 4.$$

Así Bombelli "daba sentido" a las expresiones "sin sentido" de Cardan.

Este razonamiento se convierte por tanto como el nacimiento de la variable compleja. Bombelli desarrolló un cálculo de operaciones con números complejos que se ajusta a los que conocemos en la actualidad.

Comentar en este punto que comunmente se dice que fué la ecuación cuadrática la que forzó la definición de los números complejos. Con lo expuesto anteriormente debemos asignar a la ecuación de orden tres tal papel.

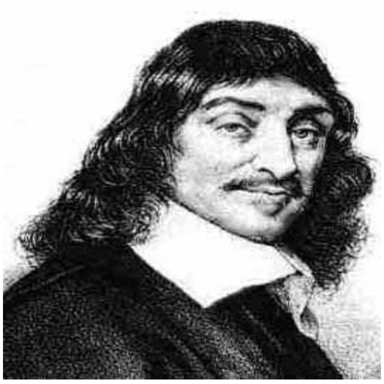
A pesar de lo aportado por Bombelli, su trabajo sobre esta materia (*L'Algebra*) fué ampliamente ignorado y considerado como misterioso e incierto. Simón Stevin apuntó en 1585 lo siguiente en esta dirección:

> *Tiene toda la legitimidad el que uno se ejercite en otras tareas y no pierda el tiempo en inexactitudes.*

Dos siglos y medio cubrieron las dudas sobre el significado y la autenticidad de los números complejos. No obstante, fueron estudiados por un gran número de matemáticos.

A principios de 1620, Albert Girard sugiere que las ecuaciones de grado n tienen n raíces. Esta premonición del teorema fundamental del álgebra estaba en este caso planteada de forma vaga y sin rigor.

René Descartes (Francia, 1596-1650), que bautizó con el nombre de **imaginarios** a los nuevos números, apuntó también que toda ecuación debía tener tantas raíces como indica su grado, aunque números no reales podían ser alguna de ellas.



R. Descartes (1596-1650)

G. W. Leibniz (1646-1716)

La siguiente referencia destacable data de 1673 con una carta de **Christian Huygens** (Holanda, 1629-1695) a **Gottfried von Leibniz** (Alemania, 1646-1716). En ella expresa la impresión del primero sobre la identidad $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1+\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$, que le había mencionado Leibniz en una carta anterior. Huygens se expresa en los siguientes términos:

> *Lo que me escribes sobre cantidades imaginarias que, no obstante, cuando son sumadas da una cantidad real, me es sorprendente y totalmente nuevo. Uno nunca creería que ésto es cierto y debe haber algo escondido en ello que es incomprensible para mí.*

Los números complejos fueron ampliamente utilizados en el siglo XVIII. Leibniz y **Johan Bernoulli** (Suiza, 1667-1748) usaron números imaginarios en la resolución de integrales. Por ejemplo,

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \int \frac{1}{(x+ai)(x-ai)}\,dx = -\frac{1}{2ai}\int \left(\frac{1}{x+ai}-\frac{1}{x-ai}\right)dx = -\frac{1}{2ai}(\log(x+ai)-\log(x-ai)).$$

Este tipo de razonamientos generaron la polémica sobre la existencia del logaritmo de números negativos y complejos. Un acalorado debate tuvieron Bernoulli y Leibniz donde este último postuló que $\log i = 0$ argumentando que como $2\log(-1)=\log(-1)^2=\log 1 = 0$ entonces $2\log i = \log i^2 = \log(-1) = 0$. Bernoulli proponía por contra, $\log i = i\pi/2$. La controversia fue resuelta por **Leonhard Euler** (Suiza 1707-1783) con su identidad $e^{\pi i}=-1$.

L. Euler (1707-1783)

Los números complejos fueron usados por Johann Lambert en proyecciones, por Jean D'Alembert en hidrodinámica y por Euler, D'Alembert y Joseph-Louis Lagrange en pruebas erróneas del teorema fundamental del álgebra. Euler fué el primero en usar la notación $i = \sqrt{-1}$, haciendo además un uso fundamental de los números complejos al relacionar la exponencial con las funciones trigonométricas por la expresión $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$. Euler se expresaba en los siguiente términos:

> *Como todos los números imaginables son mayores, menores o iguales a cero, entonces es claro que la raíz cuadrada de un número negativo no puede ser uno de estos números,[...] y esta circunstancia nos lleva al concepto de tales números, que por su naturaleza son imposibles y ordinariamente son llamados imaginarios o números falsos, porque sólo existen en la imaginación.*

Incluso el gran **Carl Friedrich Gauss** (Alemania, 1777-1856), en cuya tesis doctoral (1797) se daba la primera prueba correcta del teorema fundamental del álgebra, apuntó a finales de 1825 que *"la verdad metafísica de $\sqrt{-1}$ es elusiva"*.

C. F. Gauss (1777-1856)

Esto ilustra en parte que la satisfacción lógica sobre los números complejos entraba a finales del siglo XVIII más en el terreno de la filosofía que en el de las matemáticas. Todo lo bueno que tuvo la Era de la Razón para todas las áreas, fue en parte perturbador para esta materia.

Pedagógicamente también se planteaban dudas. La Universidad de Cambridge como ejemplo, a principios del siglo XIX, se preguntaba qué lógica regía sobre las operaciones con números complejos que permitiese su enseñanza. Así surgían preguntas como ¿$i \times 2 = 2 \times i$?, ¿es $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ para cualquier a y b negativos?, no obtenían respuestas satisfactorias.

En el siglo XIX ya proponen algunos matemáticos, de Cambridge principalmente, que debía haber unas reglas que gobernasen esta herramienta que ya demostraba a todas luces su utilidad para muchos.

La representación geométrica de los complejos como puntos del plano tiene sus primeras citas en los trabajos de 1797 del noruego **Caspar Wessel** y en 1806 en los del suizo **Jean-Robert Argand**. No obstante sería la referencia de Gauss de 1831 la que tendría el impacto suficiente.

En 1833, **William Rowan Hamilton** (Inglaterra 1805-1865) da la primera definición algebraica rigurosa de los complejos como pares de números reales.

A.-L. Cauchy (1789-1857)

El 1847 es **Agoustin-Louis Cauchy** (Francia, 1789-1857) quien da una definición abstracta de los números complejos como clases de congruencias de polinomios reales, basándose en las clases de congruencias de enteros dada por Gauss.

Ya comenzada la segunda mitad del siglo XIX, las dudas y misterios sobre los números complejos ya han desaparecido, aunque haya textos del siglo XX que aún huían de utilizarlos.

La presencia de los números complejos en diversas áreas de las matemáticas en este siglo puede ser clasificadas de manera muy genérica de la siguiente forma:

a) ALGEBRA. La solución de ecuaciones algebraicas motivó la introducción de los números complejos. Estos complejos constituyen por su parte un cuerpo cerrado donde muchos problemas de álgebra lineal y otras áreas del álgebra abstracta encontraron solución.

b) ANALISIS. El siglo XIX fué testigo del desarrollo de una poderosísima y bellísima rama de las matemáticas, la teoría de funciones complejas. Uno de los elementos más sorprendentes es que la condición de diferenciable implica la de infinitamente diferenciable, hecho sin análogo en las funciones reales.

c) GEOMETRIA. Los números complejos introdujeron generalidad y propiedades de simetría en varias ramas de la geometría, tanto en la euclídea como la no euclídea.

d) TEORIA DE NUMEROS. Ciertas ecuaciones diofánticas pueden ser resueltas con el uso de complejos.

   Hadamard decía que *"el camino más corto entre dos verdades en el campo real pasa a través del campo complejo"*. Un ejemplo de este autor es altamente ilustrativo: el producto de la suma de cuadrados es de nuevo suma de cuadrados, y lo probaba de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
(a^2+b^2)(c^2+d^2) &= (a+bi)(a-bi)(c+di)(c-di) \\
&= [(a+bi)(c+di)][(a-bi)(c-di)] \\
&= (u+iv)(u-iv) \\
&= u^2+v^2
\end{aligned}$$

Bibliografía:

I. Kleiner, *"Thinking the Unthinkable: The Story of Complex Numbers (with a Moral)"*, The Mathematics Teacher, 81:7 (1988), 583-592.

D. E. Smith, *History of Mathematics (Vol I-II)*. Dover. 1958. New York.