1.- LA MECÁNICA Y SUS PARTES

Existe la costumbre de dividir el estudio de la Mecánica en tres partes:

+ ***Cinemática***: es una descripción geométrica del movimiento
+ ***Dinámica***: estudia el movimiento de un sistema material sometido a acciones determinadas.
+ ***Estática***: estudia las condiciones de equilibrio de un sistema material.

En el presente tema vamos a estudiar la **CINEMÁTICA**, parte de la **Mecánica** que estudia el movimiento de los cuerpos prescindiendo de las causas que lo provocan.

Conviene iniciar el estudio del movimiento por el de una *partícula material*, o *punto material* (p.m.). Denominamos así a un cuerpo material, de cuyo tamaño y forma se hace caso omiso, así como de las posibles rotaciones o desplazamientos de sus partes. Por tanto, es considerado como un punto móvil con una cierta masa.

Sistema referencial: Todos los movimientos han de ser descritos en relación a un sistema de referencia, dado por un punto O del espacio y un sistema de coordenadas centrado en él.
El sistema de coordenadas cartesianas, OXYZ, es un ejemplo de sistema referencial.

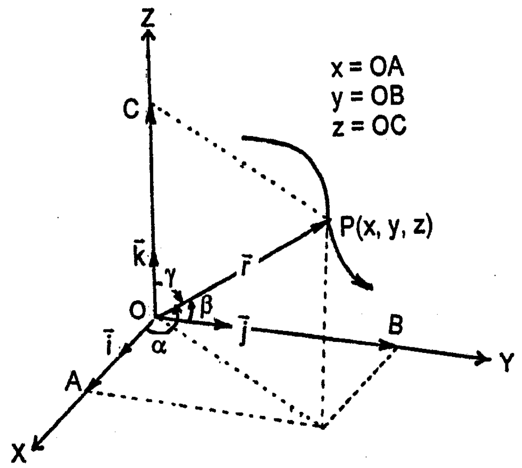
2.- POSICIÓN

Dado un sistema referencial OXYZ, en el espacio tridimensional, la **posición** P de un punto material puede expresarse:

+ o bien por **sus coordenadas cartesianas**:
$P(x, y, z)$

+ o bien por su **vector de posición**, $\vec{r}$. El vector de posición de un p.m. P es el vector cuyo origen está situado en el origen del referencial, O(0, 0, 0) y su extremo en la posición del punto material, P(x, y, z):

$$\vec{r} \equiv \overrightarrow{OP}$$



Por ello, este vector de posición se relaciona con las coordenadas del p.m. P(x, y, z) así:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Decimos que el p.m. se mueve respecto del sistema referencial OXYZ cuando ocupa diferentes posiciones a medida que transcurre el tiempo. El vector de posición, entonces, varía con el tiempo, pudiéndose escribir en general como función de dicho parámetro tiempo, t.

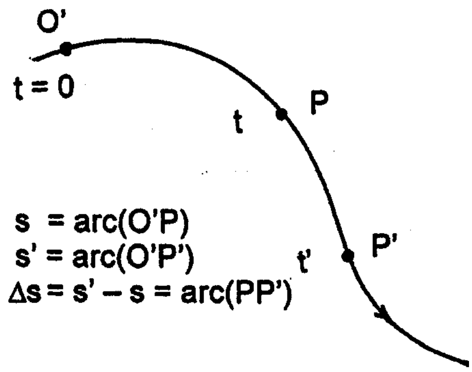
$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

Se llama **trayectoria** del p.m., en su movimiento, al conjunto de posiciones que adopta dicho punto en el espacio, al transcurrir el tiempo. Es en general una línea curva. Viene expresada en forma paramétrica por la terna de funciones: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ (forma paramétrica general de expresar una curva en el espacio; el parámetro es, en este caso, el tiempo t).

A) Posición de un móvil en su trayectoria

Supongamos un cuerpo material móvil sobre la trayectoria de figura.

Comencemos a contar el tiempo cuando el móvil pasa por O' (posición inicial, t = 0).



La posición P del móvil sobre dicha trayectoria en el instante t queda determinada por el arco O'P, tomado sobre la trayectoria, que llamaremos s.

$$s = \text{arc } O'P$$

es la posición del móvil en el instante t.

En otro instante posterior t', supongamos que el móvil se halla, sobre la trayectoria, en el punto P'. La nueva posición vendrá dada por

$$s' = \text{arco } O'P'$$

En general pues, *el arco s determina la posición del móvil sobre la trayectoria dada*, *en todo instante*, *respecto del origen O'.* Este arco s es pues función del tiempo, pudiéndose escribir:

$$s = s(t)$$

Esta ecuación se denomina "***ley horaria***" del movimiento, porque determina la *posición del móvil sobre su trayectoria en todo instante*.

En el intervalo de tiempo $\Delta t = t' - t$, el móvil se ha desplazado desde P a P', es decir, un arco sobre la trayectoria

$$\Delta s = \text{arco } PP' = \text{arco } O'P' - \text{arco } O'P = s' - s$$

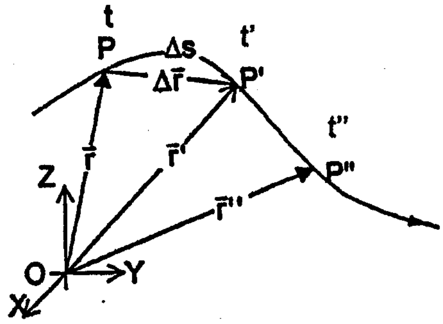
A este arco se le denomina **desplazamiento sobre la trayectoria** del móvil en el intervalo temporal $\Delta t = t' - t$.

B) Posición de un móvil en el espacio

Al recorrer un móvil los puntos de su trayectoria, el vector de posición $\vec{r}$ y las coordenadas de dicho cuerpo móvil x, y, z varían con el tiempo.

Por lo tanto: $\vec{r}\,(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} + z(t)\,\hat{k}$

(En el dibujo se representan las posiciones P, P', P'' del cuerpo móvil en tres instantes sucesivos t, t', t''. El vector de posición en esos instantes es $\vec{r}$, $\vec{r}\,'$, $\vec{r}\,''$, respectivamente).



Vector desplazamiento: Sean P y P' dos posiciones sucesivas del móvil, en los instantes t y t', respectivamente. Sean $\vec{r}$ y $\vec{r}\,'$ los vectores de posición correspondientes.
El vector $\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}\,' - \vec{r}$ se denomina ***vector desplazamiento*** en el intervalo $\Delta t = t' - t$.

En ese intervalo de tiempo pues,
el **desplazamiento sobre la trayectoria** del móvil es el arco de trayectoria PP' $\Delta s = s' - s$
y el **vector desplazamiento** es $\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}\,' - \vec{r}$

Evidentemente, el arco Δs, recorrido en el intervalo Δt, es mayor o igual al módulo del vector desplazamiento: $\Delta s \geq |\Delta\vec{r}\,|$

3.- VELOCIDAD

A) Se define **velocidad media** de un cuerpo móvil en un intervalo de tiempo $\Delta t = t' - t$ como el cociente entre el vector desplazamiento $\Delta\vec{r} = \vec{r}\,' - \vec{r}$ y dicho intervalo de tiempo $\Delta t = t' - t$:

$$\boxed{\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}\,'-\vec{r}}{t'-t}}$$

Asimismo, se define **rapidez media** del móvil (o celeridad media) en ese intervalo:

$$\boxed{v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s'-s}{t'-t}}$$

donde evidentemente es $\Delta s = s' - s = \text{arc } PP'$

B) Si hacemos tender a cero el intervalo temporal, $\Delta t \to 0$ (es decir, consideramos dos instantes muy próximos, t y t', tan próximos como queramos), entonces el vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ y el desplazamiento sobre la trayectoria, Δs, también tenderán a cero, $\Delta\vec{r} \to 0$ y $\Delta s \to 0$ (puesto que el punto P' se sitúa tan próximo a P como queramos). Pero los cocientes $\Delta\vec{r}/\Delta t$ y $\Delta s/\Delta t$ tienden al valor de las derivadas de $\vec{r}\,(t)$ y de $s(t)$, respectivamente, en el instante t.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad\qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

A estos valores se les denomina precisamente:

Velocidad (instantánea) del móvil, en el instante t:

$$\boxed{\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

Rapidez (instantánea) del móvil, en el instante t (a veces, "celeridad"):

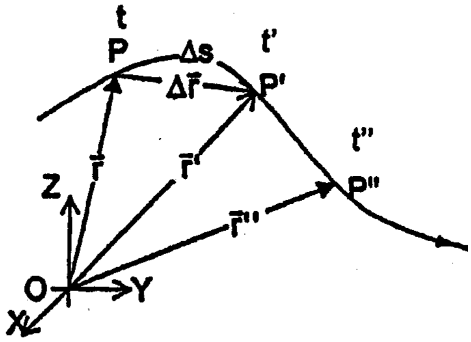
$$\boxed{v \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}}$$

Obsérvese que la rapidez de un móvil en un determinado instante es un *escalar* que mide la intensidad de su velocidad (p.ej., v = 95 km/h). La velocidad en cambio es un *vector*; señala, además de la intensidad de la velocidad, su dirección y sentido.

C) Estudiemos, a continuación, este **vector velocidad:**

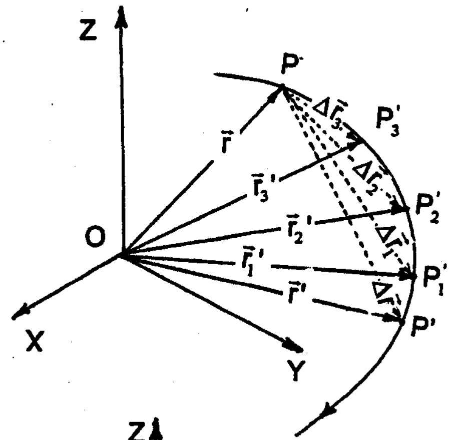
i) *su módulo:*

$$|\vec{v}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v$$



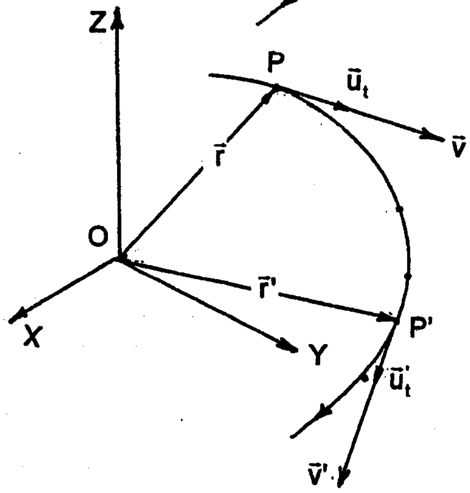
porque, cuando $\Delta t \to 0$, el arco Δs = arc PP' y la cuerda $|\Delta \vec{r}| = \overline{PP'}$ tienden a confundirse en longitud. Por tanto, ***el módulo del vector velocidad coincide con la rapidez:***

$$|\vec{v}| = v = \frac{ds}{dt}$$



ii) *su dirección y sentido:* Si sobre la trayectoria tomamos los puntos P'_1 , P'_2 , P'_3 , ... cada vez más cercanos al punto P, los tiempos empleados en llegar a ellos desde P, Δt_1, Δt_2, Δt_3, ... son cada vez menores, y los vectores desplazamiento $\Delta \vec{r}_1$, $\Delta \vec{r}_2$, $\Delta \vec{r}_3$, ... tendrán su extremo en puntos cada vez más cercanos a P.

Los segmentos PP'_1, PP'_2, PP'_3,.... son secantes a la trayectoria. Al tomar P' cada vez más cercano a P, en el límite, PP' tocará a la curva trayectoria sólo en el punto P, es decir, será *tangente* a ella. Así será también el vector desplazamiento, infinitamente pequeño. Y lo mismo ocurrirá, en el límite, con el vector $\Delta \vec{r}/\Delta t$. Por lo tanto, ***la dirección y sentido de la velocidad es tangente a la trayectoria en el sentido del avance del móvil.***



Si expresamos esta *dirección tangencial* en el sentido de avance mediante un versor $\hat{u}_t$ que la indique, *versor tangente*, podemos escribir:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \hat{u}_t}$$

D) En ***coordenadas cartesianas***: Refiriéndonos a un sistema de referencia cartesiano OXYZ , se tiene en los instantes t y t':

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \qquad y \qquad \vec{r}\,' = x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k}$$

Por tanto, $\Delta \vec{r} = \vec{r}\,' - \vec{r} = (x' - x)\hat{i} + (y' - y)\hat{j} + (z' - z)\hat{k} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}$

Dividiendo por Δt y haciendo tender $\Delta t \to 0$:

$$\vec{v} = \lim \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim \frac{\Delta x}{\Delta t}\,\hat{i} + \lim \frac{\Delta y}{\Delta t}\,\hat{j} + \lim \frac{\Delta z}{\Delta t}\,\hat{k} = \frac{dx}{dt}\,\hat{i} + \frac{dy}{dt}\,\hat{j} + \frac{dz}{dt}\,\hat{k}$$

Así pues, el vector velocidad tiene como componentes cartesianas las derivadas de las componentes del vector de posición

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

y el módulo de la velocidad, es decir la rapidez, viene dada por:

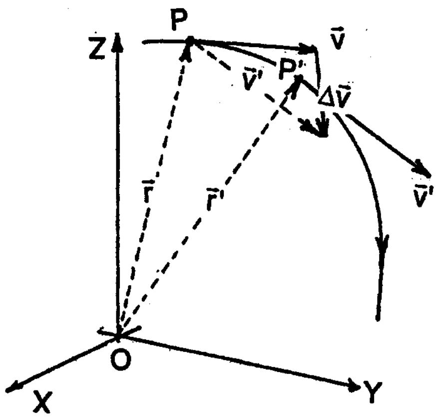
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

<u>Problema de aplicación</u>: La masa de un cuerpo es 2 kg. Su momento angular viene dado por la fórmula $\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v})$. Si su vector de posición es $\vec{r}(t) = (t+1)\hat{i} + (t^2-1)\hat{j} - 2\hat{k}$, hallar la posición del cuerpo en los instantes t = 0 s y t = 2 s, así como las velocidades y rapideces en dichos instantes. Calcular, por fin, los momentos angulares del cuerpo en dichos dos instantes.

Respuestas: $P_0(1, -1, -2)$ $P_2(3, 3, -2)$ $\vec{v}(0) = \hat{i}$ $v(0) = 1$ m/s $\vec{v}(2) = 1 + 4\hat{j}$ $v(2) = \sqrt{17} = 4'12$ m/s
$\vec{L}(0) = -4\hat{j} + 2\hat{k}$ $L(0) = 2\sqrt{5} = 4'47$ kg.m^2/s $\vec{L}(2) = 16\hat{i} - 4\hat{j} + 18\hat{k}$ $L(2) = \sqrt{596} = 24'41$ kg.m^2/s

4.- ACELERACIÓN

A) Consideremos un móvil en su trayectoria. (Para un estudio más sencillo, supondremos que la trayectoria es plana, en el plano YZ, por ejemplo). Sean P y P' sus posiciones en dos instantes sucesivos t y t', respectivamente. Sean $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ sus velocidades en ambos instantes. En general, la diferencia de velocidades $\Delta\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}$ no es nula. Véase en la figura el vector $\Delta\vec{v}$, obtenido geométricamente trasladando $\vec{v}'$ paralelamente a sí mismo a coincidir su origen con el de $\vec{v}$, ambos en P.



Se define la **<u>aceleración media</u>** del móvil en el intervalo $\Delta t = t' - t$ como el cociente:

$$\boxed{\vec{a}_m \equiv \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}' - \vec{v}}{t' - t}}$$

B) Pues bien, si el intervalo temporal Δt tiende a cero (o sea, el punto P' es muy próximo, infinitamente próximo a P), entonces el valor vectorial que toma la aceleración media define la **<u>aceleración</u>** (instantánea) del móvil en el punto P, en el instante t.

$$\boxed{\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

Por lo tanto, la aceleración $\vec{a}$ se obtiene por derivación de la velocidad $\vec{v}(t)$. Como ésta se obtiene a su vez por derivación del vector de posición $\vec{r}$, resulta pues que la aceleración viene dada por la segunda derivada del vector de posición.

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}$$

C) En coordenadas cartesianas hemos visto que:

$$\vec{r}\,(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} + z(t)\,\hat{k}$$

$$\vec{v}\,(t) = v_x(t)\,\hat{i} + v_y(t)\,\hat{j} + v_z(t)\,\hat{k} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

Si llamamos ahora a las componentes cartesianas de la aceleración a_x, a_y y a_z, podemos escribir:

$$\vec{a}\,(t) = a_x\,\hat{i} + a_y\,\hat{j} + a_z\,\hat{k} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$$

Resumiendo, pues:

<u>Posición</u> $\vec{r}(t)$	***<u>Velocidad</u>*** $\vec{v}(t)$	***<u>Aceleración</u>*** $\vec{a}(t)$
$x(t)$	$v_x(t) = \frac{dx}{dt}$	$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$
$y(t)$	$v_y(t) = \frac{dy}{dt}$	$a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$
$z(t)$	$v_z(t) = \frac{dz}{dt}$	$a_z(t) = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$

D) <u>Componentes intrínsecas de la aceleración:</u>

Cuando un móvil describe una trayectoria curva, presenta en cada punto una aceleración $\vec{a}$. Esta aceleración se puede descomponer en dos direcciones, tangencial y normal al movimiento, dando lugar a dos componentes: tangencial $\vec{a}_t$ y normal o centrípeta $\vec{a}_n$, de modo que:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

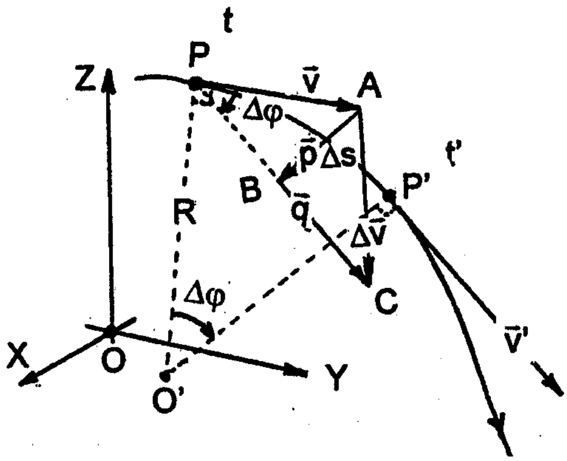
+ aceleración <u>tangencial</u>: es debida a que el *módulo* de la velocidad (o sea, la rapidez) varía con el tiempo (por ejemplo, el móvil pasa de ir a 20 m/s a ir a 27 m/s).

+ aceleración <u>normal</u> o centrípeta: es debida a que la velocidad varía en *dirección y sentido* (trayectoria curva).

Para llegar a entender la naturaleza de estas dos componentes, estudiémoslas en el caso de un movimiento plano (dos dimensiones); las conclusiones que se deducen de este estudio no pierden su generalidad al aplicarlas al espacio tridimensional, con pocas concreciones más.

Sean P y P' las posiciones de un móvil en los instantes sucesivos t y t' = t + Δt. Sean $\vec{v}$ y $\vec{v}' = \vec{v} + \Delta\vec{v}$ las velocidades respectivas.

Estúdiense la geometría del dibujo, su construcción, y las relaciones siguientes:



$\Delta\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{p} + \vec{q}$

Δs = arc(PP')

$\Delta\varphi$ = ang(PO'P') = ang(CPA)

$|\vec{p}| = v\ \mathrm{sen}(\Delta\varphi)$

$|\vec{q}|$ = PC - PB = $v' - v\cos(\Delta\varphi)$

La primera de estas relaciones nos permite escribir:

$$\vec{a} = \lim\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim\frac{\vec{p}}{\Delta t} + \lim\frac{\vec{q}}{\Delta t}$$

Estudiemos a continuación cada uno de estos dos límites.

i) $\boxed{\lim\frac{\vec{p}}{\Delta t}}$

a) *<u>Su módulo</u>:*

$$\left|\lim\frac{\vec{p}}{\Delta t}\right| = \lim\frac{|\vec{p}|}{\Delta t} = \lim\frac{v\mathrm{sen}(\Delta\varphi)}{\Delta t} = v\lim\frac{\mathrm{sen}(\Delta\varphi)}{\Delta t} = v\lim\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} =$$

$$= v\lim\frac{\Delta s/R}{\Delta t} = \frac{v}{R}\lim\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v}{R}v = \frac{v^2}{R}$$

Razonando los pasos anteriores: Cuando $\Delta t \to 0$:

+ $\Delta\varphi$ tiende a cero; para ángulos muy pequeños, su seno coincide con su valor (en radianes): $\mathrm{sen}(\Delta\varphi) \to \Delta\varphi$

+ Δs = arc(PP') se confunde con un arco de circunferencia. En él, $\Delta\varphi = \Delta s/R$ donde R es el "radio de curvatura" de la trayectoria, en P.

+ lim ($\Delta s/\Delta t$) = v.

b) *<u>Su dirección y sentido</u>:*

Cuando $\Delta t \to 0$, P' se sitúa infinitamente próximo a P. Entonces $\vec{p}$ es un vector perpendicular a $\vec{v}$, dirigido hacia O', el centro de curvatura de la trayectoria en P. Por tanto, éstos serán también la dirección y sentido del vector $\lim(\vec{p}/\Delta t)$: normal a la trayectoria, en el sentido de la concavidad. Por eso a esta componente se le denomina **<u>aceleración normal</u>** o centrípeta, $\vec{a}_n$.

Si llamamos $\hat{u}_n$ al versor en dicha dirección y sentido, podemos escribir:

$$\vec{a}_n = \lim\frac{\vec{p}}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}\hat{u}_n$$

ii) $\boxed{\lim \dfrac{\vec{q}}{\Delta t}}$

a) *Su módulo:*

$$\left|\lim \frac{\vec{q}}{\Delta t}\right| = \lim \frac{|\vec{q}|}{\Delta t} = \lim \frac{v' - v\cos(\Delta\varphi)}{\Delta t} = \lim \frac{v' - v}{\Delta t} = \lim \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

En efecto, cuando $\Delta t \to 0$, $|\vec{q}|$ = v' - v cos($\Delta\varphi$) $\approx$ v' - v = Δv , ya que cos($\Delta\varphi$) $\approx$ 1 al tender Δt a cero.

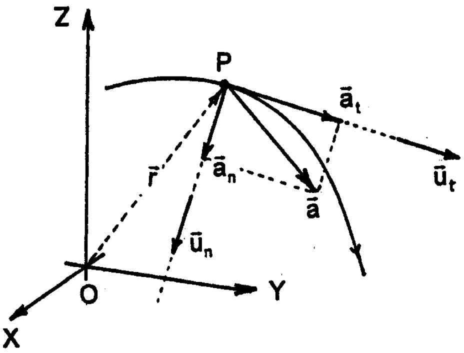
b) *Su dirección y sentido:*

Cuando $\Delta t \to 0$, $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ tienden a ser vectores paralelos. Al ser $\vec{q}$ paralelo a $\vec{v}'$, tenderá a serlo a $\vec{v}$, y por tanto paralelo a la trayectoria en P; es decir en la dirección tangente a la misma, (y en el sentido de avance del móvil, en nuestro ejemplo gráfico). Por consiguiente, la dirección y sentido de lim($\vec{q}/\Delta t$), que coincide con los de $\vec{q}$, es tangencial, (en el sentido de avance, en nuestro ejemplo). Por eso a esta componente se la denomina **aceleración tangencial**, $\vec{a}_t$.

Si llamamos $\hat{u}_t$ al versor en dicha dirección y sentido de avance,

podemos escribir: $\vec{a}_t = \lim \dfrac{\vec{q}}{\Delta t} = \dfrac{dv}{dt}\,\hat{u}_t$

Recapitulando: Cuando un móvil sigue una trayectoria curva experimenta, en general, dos aceleraciones:



+ aceleración tangencial, si al desplazarse el móvil varía su rapidez (creciendo o decreciendo). Su valor es: $a_t = \dfrac{dv}{dt}$

+ aceleración normal, o centrípeta, si al desplazarse debe curvar su trayectoria (variando su dirección y sentido). Su valor es: $a_n = \dfrac{v^2}{R}$

Como ambas componentes son perpendiculares entre sí, resultan las fórmulas siguientes, para la **aceleración total** $\vec{a}$ (estudiar la figura):

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \qquad \vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\hat{u}_t + \frac{v^2}{R}\,\hat{u}_n \qquad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}}$$

Problema de aplicación: Con los datos del problema anterior (pg. 7), hallar la fuerza que actúa sobre el cuerpo, $\vec{F} = m\vec{a}$, en el instante t = 0, así como el momento de la fuerza respecto del origen, $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, en ese instante.

Por otro lado, calcula el valor de $\dfrac{d\vec{L}}{dt}$ en el instante t = 0. ¿Qué conclusión obtienes?

Respuestas: $\vec{F} = 4\,\hat{j}$ newtons $\vec{M} = 8\,\hat{i} + 4\,\hat{k} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$

5.- MOVIMIENTO RECTILÍNEO

Un móvil posee un **movimiento rectilíneo** cuando su trayectoria es una línea recta. Por lo tanto, su característica es que el radio de curvatura es infinito.

$$\boxed{R = \infty}$$

Por tanto, la aceleración normal es nula: $a_n = v^2 / R = 0$.

Y la aceleración tangencial vale: $a_t = dv / dt$

Así pues, la aceleración total sólo tiene la componente tangencial. O de otro modo, en el movimiento rectilíneo la **aceleración** es:

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt}}$$

Estudiaremos a continuación, como casos más importantes, el movimiento rectilíneo uniforme (MRU), el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA), y el movimiento armónico simple (MAS).

a) Movimiento rectilíneo uniforme (MRU)

- Un móvil posee un **movimiento rectilíneo uniforme** cuando su aceleración es **nula**.

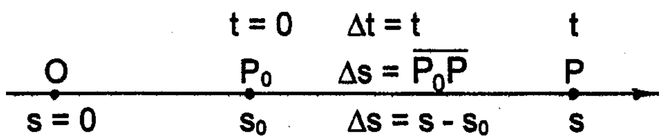
$$\boxed{a = 0}$$

- El móvil, en este caso, tiene velocidad constante:

$$\boxed{v \ \text{constante}}$$

  - en módulo: en efecto, si a = dv/dt = 0, la función primitiva de la aceleración, que es la velocidad, debe ser constante.
  - en dirección y sentido, pues la trayectoria es recta.

- Si en el instante t = 0 el móvil pasa por el punto P_0, tal que $s_0 = \overline{OP}_0$, y al cabo de un tiempo t llega con velocidad constante v al punto P, tal que $s = \overline{OP}$, se verificará:



$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - 0} = \frac{s - s_0}{t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{s = s_0 + v\,t}$$

Esta expresión da la posición del móvil, en todo instante, respecto al origen referencial O.

b) Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA)

- Un móvil posee un **movimiento rectilíneo uniformemente acelerado** cuando su **aceleración** es constante:

$$\boxed{a \ \text{constante}}$$

• La **velocidad** puede obtenerse por integración de la función aceleración:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \rightarrow \quad dv = a\,dt \quad \rightarrow \quad \int dv = \int a\,dt + C = a\int dt + C \quad \rightarrow \quad v = a\,t + C$$

Si en el instante t = 0 la velocidad del móvil es v_0 (velocidad inicial), podemos calcular el valor de C, sustituyendo en la anterior relación: $v_0 = a.0 + C \rightarrow v_0 = C$ y por tanto la ecuación de la velocidad puede ser escrita así:

$$\boxed{v = v_0 + a\,t}$$

• La **posición** del móvil puede ser obtenida a partir de la relación $v = \frac{ds}{dt}$:

$$ds = v\,dt = (v_0 + a\,t)\,dt \quad \rightarrow \quad \int ds = \int(v_0 + a\,t)\,dt = v_0\int dt + a\int t dt \quad \rightarrow \quad s = v_0\,t + ½\,a\,t^2 + C'$$

Supongamos además que en el instante inicial, t = 0, el móvil se halla en la posición s_0 (posición inicial). Sustituyendo este valor en la expresión anterior, resulta:
$s_0 = v_0.0 + ½\,a\,0^2 + C'$ o sea $s_0 = C'$, que permite escribir dicha expresión así:

$$\boxed{s = s_0 + v_0\,t + ½\,a\,t^2}$$

Esta relación permite conocer la posición s del móvil en todo instante t.

• Si en las ecuaciones: $v = v_0 + a\,t$ y $s = s_0 + v_0\,t + ½\,a\,t^2$ eliminamos el parámetro tiempo t, podremos expresar la posición s del móvil en función de la velocidad que posee en dicha posición. Para ello, se despeja t en la primera y se sustituye su valor en la segunda; resulta:

$$t = \frac{v - v_0}{a} \qquad\qquad s = s_0 + v_0\frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2$$

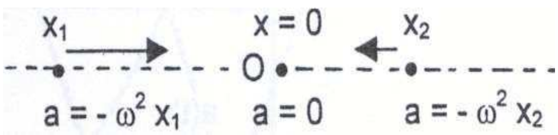
Operando, resulta: $$\boxed{v^2 - v_0^2 = 2\,a\,(s - s_0)}$$

c) Movimiento vibratorio armónico simple (MAS)

• Un móvil posee un **movimiento armónico simple** cuando su trayectoria es rectilínea y su aceleración es:

$$\boxed{a = -\,\omega^2\,x}$$

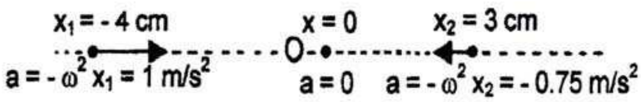
donde ω^2 es una constante, lógicamente positiva.



Obsérvese que la aceleración *no es constante*, sino que depende de la posición del móvil respecto de O, centro del movimiento. Además esta aceleración está dirigida en todo instante hacia dicho centro O.

Ejemplo: Hallar la aceleración de un móvil dotado de un MAS tal que ω = 5 rd/s, en puntos de su trayectoria, x_1= - 4 cm y x_2 = 3 cm.

Para x_1 = - 4 cm: $a_1 = - 25x(-0'04) = 1\ m/s^2$
Para x_2 = 3 cm: $a_1 = - 25x0'03 = - 0'75\ m/s^2$



• La **posición** x, en todo instante t, de un móvil dotado de un MAS viene dada por la expresión:

$$\boxed{x(t) = A\ \mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0)}$$

En esta ecuación llamamos:

. $x(t)$ — **Posición** del móvil en todo instante. Se la llama generalmente **elongación** del móvil. En el Sistema Internacional, se mide en m.

. A — **Amplitud** del movimiento. Es constante, y se mide en m. Representa el máximo valor de la elongación, o máxima distancia a la que el móvil puede encontrarse del centro O.
En efecto, cuando $\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0) = \pm 1$ entonces $x = \pm A$.

. $\phi(t) = \omega t + \varphi_0$ — **Fase** del movimiento. Es un ángulo creciente con el tiempo. Se mide en radianes.

. ω — **Pulsación** o **frecuencia angular** del movimiento. Es una constante característica del movimiento. Tiene dimensiones de velocidad angular, por lo que se mide en rd/s.

. φ_0 — **Fase inicial** o **constante de fase** del movimiento. Es también constante. Corresponde al valor de la fase para t = 0; es decir, $\phi(0) = \varphi_0$

• La **velocidad** del móvil, en cualquier instante t, v(t), se obtiene por derivación de x(t), pues v = dx/dt. Resulta:

$$\boxed{v(t) = \omega\ A \cos(\omega t + \varphi_0)}$$

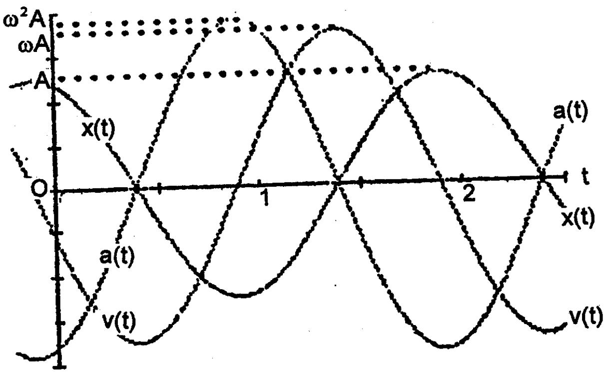
• La **aceleración** a(t) se deduce mediante nueva derivación, ya que a = dv/dt. Resulta:

$$\boxed{a(t) = -\ \omega^2\ A\ \mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0)}$$

Teniendo presente la expresión de x(t), se puede escribir:

$$a(t) = -\ \omega^2\ A\ \mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0) = -\ \omega^2\ x(t)$$

con lo que hemos comprobado que efectivamente la ecuación de la posición x(t), satisface la definición de MAS dada al principio.



• *Ejercicio:* Compruébese cómo el MAS es un movimiento de vaivén, con posiciones extremas $x = \pm A$, en las que el móvil se detiene ($v = 0$), invirtiendo el sentido del movimiento; en estos puntos de máxima separación del centro O, la velocidad es nula pero la aceleración adquiere valores máximos ($a = \pm \omega^2 A$), siempre dirigida hacia dicho centro.

$x = -A$		$x = 0$		$x = A$
$v = 0$	$\rightarrow$	$v = \omega A$	$\rightarrow$	$v = 0$
$v = 0$	$\leftarrow$	$v = -\omega A$	$\leftarrow$	$v = 0$
$a = \omega^2 A$	$\rightarrow$	$a = 0$	$\leftarrow$	$a = -\omega^2 A$

$\omega t + \varphi$	x	v	a
0	0	ωA	0
$\pi/2$	A	0	$-\omega^2 A$
π	0	$-\omega A$	0
$3\pi/2$	$-A$	0	$\omega^2 A$
2π	0	ωA	0

• Puesto que las funciones seno y coseno son cíclicas, el movimiento es evidentemente **periódico**. El **periodo** T es el tiempo que transcurre entre dos instantes t_1 y t_2 consecutivos cuyas fases $\phi_1 = \omega t_1 + \varphi_0$ y $\phi_2 = \omega t_2 + \varphi_0$ difieren en 2π. O sea:

$$T \equiv t_2 - t_1 \quad \text{es tal que} \quad \Delta\phi \equiv \phi_2 - \phi_1 = 2\pi$$

Por consiguiente:

$$(\omega t_2 + \varphi_0) - (\omega t_1 + \varphi_0) = 2\pi$$

$$\omega (t_2 - t_1) = 2\pi$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Al inverso del periodo se le denomina **frecuencia** del MAS. O sea, $f = 1/T$. Se mide en hercios (Hz) o ciclos/s. Las relaciones entre el periodo T, la frecuencia f y la pulsación ω de un MAS son:

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f}$$

6.- MOVIMIENTO CIRCULAR

• Un móvil posee un **movimiento circular** cuando su trayectoria es una circunferencia. El radio de curvatura de la trayectoria es, por tanto, constante:

$$\boxed{R \text{ constante}}$$

• En tal caso, (siguiendo la figura inferior), supongamos al móvil, en el instante t, situado en P_0; sea pues su posición inicial $s_0 = \text{arc}AP_0$. Si en un instante t posterior, es P su nueva posición, determinada por el arco $s = \text{arc}AP$, entonces, como en el caso general:

$$s(t) \qquad v = \frac{ds}{dt} \qquad a_t = \frac{dv}{dt} \qquad a_n = \frac{v^2}{R}$$

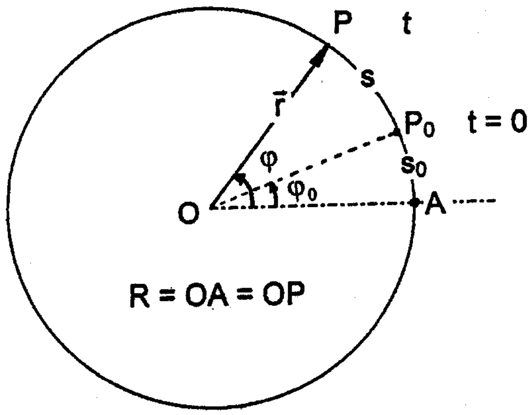
• Hay otro modo de estudiar el movimiento sobre la circunferencia. El vector de posición $\vec{r}$ es de módulo constante, $|\vec{r}| = R$; se le llama *radiovector.* Éste, al seguir el movimiento del cuerpo, va describiendo con AO un ángulo φ.

Este ángulo sirve para determinar la posición del móvil sobre la trayectoria circular; por eso se le denomina **posición angular**. Se mide en radianes.

• La posición angular varía con el tiempo, $\varphi(t)$. Su derivada define la **velocidad angular** del móvil, ω:

$$\boxed{\omega = \frac{d\varphi}{dt}}$$

Se expresa en radianes por segundo, rd/s.



• Esta velocidad angular, a su vez, puede variar con el tiempo, $\omega(t)$. Su derivada define la **aceleración angular**, α:

$$\boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt}}$$

Se expresa en rd/s^2.

• Puesto que en la circunferencia, s = R φ, siendo el ángulo φ medido en radianes, se tienen las siguientes relaciones:

Posición lineal:	$s(t)$	Posición angular:	$\varphi(t)$	Relación: $s = R\,\varphi$
Velocidad lineal:	$v(t) = ds/dt$	Velocidad angular:	$\omega(t) = d\varphi/dt$	Relación: $v = R\,\omega$
Acel. tangencial:	$a_t = dv/dt$	Acel. angular:	$\alpha(t) = d\omega/dt$	Relación: $a_t = R\,\alpha$
Acel. normal:	$a_n = v^2/R$			Relación: $a_n = R\,\omega^2$

a) Movimiento circular uniforme (MCU)

Un movimiento circular es **uniforme** cuando la **aceleración angular** es nula:

$$\alpha = 0$$

Entonces, la **velocidad angular** es constante:

$$\omega \text{ constante}$$

La **posición angular** viene expresada así:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega\, t$$

La aceleración tangencial es nula:

$$a_t = R\,\alpha = 0.$$

La aceleración normal es constante:

$$a_n = R\,\omega^2.$$

Por tanto, la **aceleración total** del movimiento es una aceleración normal o centrípeta y constante: $a = R\,\omega^2$

b) Movimiento circular uniformemente acelerado (MCUA)

Un movimiento circular es **uniformemente acelerado** cuando la **aceleración angular** es constante: α constante

De modo análogo a los resultados obtenidos al estudiar el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, se obtiene para la **velocidad angular** y para la **posición angular** (integraciones sucesivas de $\alpha = d\omega/dt$ y de $\omega = d\varphi/dt$ con las condiciones iniciales, ω_0: velocidad angular inicial y φ_0: posición angular inicial):

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\,\alpha\, t^2$$

De estas dos últimas ecuaciones, por eliminación del tiempo t, se obtiene esta otra ecuación, de gran eficacia en la resolución de problemas:

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\varphi - \varphi_0)$$

Las **<u>componentes intrínsecas de la aceleración</u>** son entonces:

$a_t = R\,\alpha$ constante $a_n = R\,\omega^2$ dependiente del tiempo.

y la **aceleración total**:

$$\vec{a} = R\,\alpha\,\hat{u}_t + R\,\omega^2\,\hat{u}_n \qquad a = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$