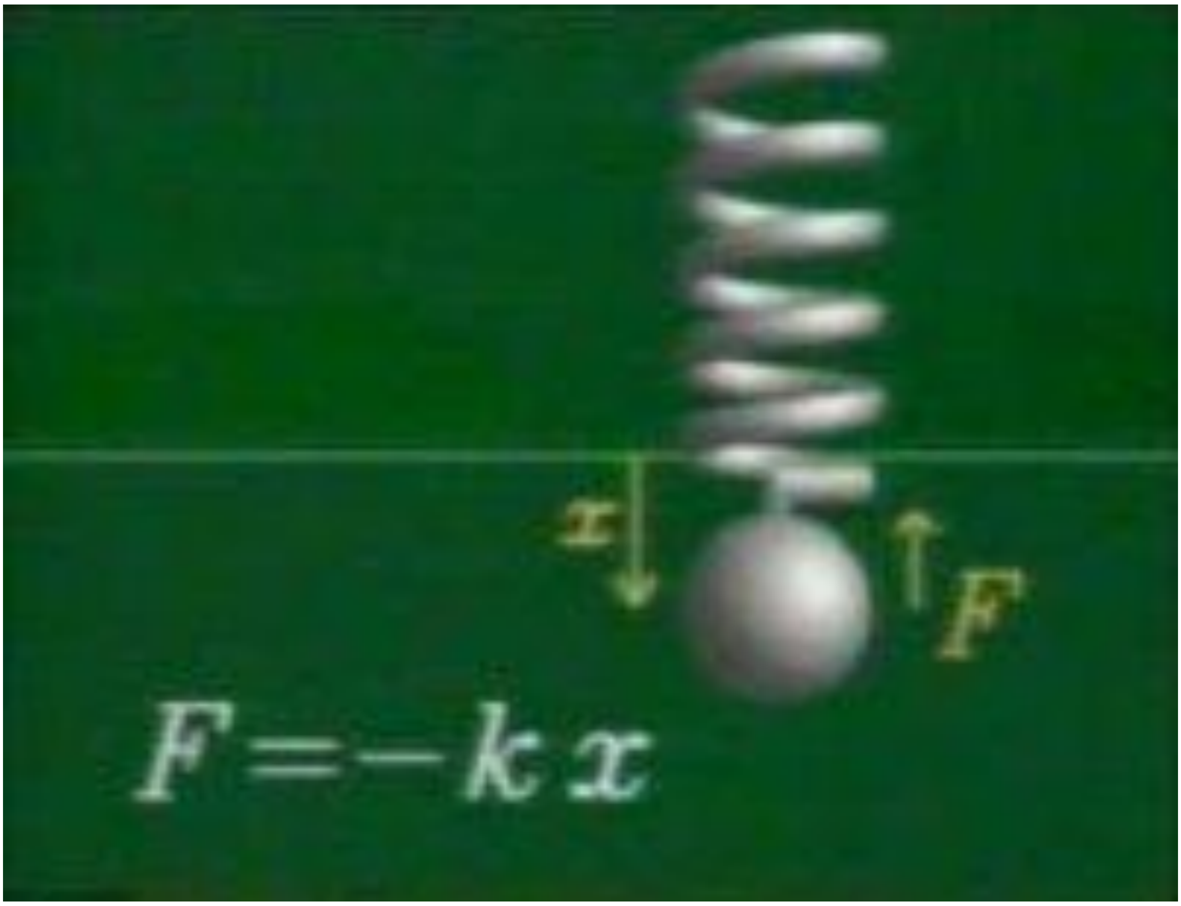
OSCILADOR ARMÓNICO



1.- Fenómenos periódicos
2.- Cinemática del movimiento vibratorio
3.- Dinámica del movimiento vibratorio:
a) Resorte elástico
b) Péndulo simple
Actividades desarrolladas

1.- FENÓMENOS PERIÓDICOS

Hay multitud de fenómenos naturales en los que las medidas de las magnitudes empleadas para describirlos repiten su secuencia de valores en intervalos iguales de tiempo mientras transcurre éste. Se los llama *fenómenos periódicos*, y si están relacionados con cuerpos en movimiento, se les denomina *movimientos periódicos*.

La Luna describe un movimiento periódico alrededor de la Tierra. Asimismo la Tierra describe sobre sí misma y alrededor del Sol movimientos periódicos.

También son movimientos periódicos el que describe un cuerpo suspendido del extremo de un muelle vertical, los de los extremos de las ramas de un diapasón, o el de la esfera del péndulo de algunos relojes.

La transmisión de señales de radio y televisión tiene lugar por variaciones periódicas de magnitudes electromagnéticas.

Finalmente, los átomos de las moléculas de las sustancias vibran periódicamente en torno a posiciones relativamente fijas.

Existen en la naturaleza muchos fenómenos periódicos que podamos observar o producir. Vamos a prestar especial interés, sin embargo, al ***movimiento periódico*** descrito por algunos cuerpos:

Un cuerpo describe un movimiento periódico cuando, recorriendo una trayectoria cerrada, pasa en intervalos iguales de tiempo por cualquiera de sus puntos con la misma velocidad.

Al menor de esos intervalos de tiempo se le denomina ***periodo*** del movimiento. Se acostumbra a llamarlo T y se expresa en *segundos (s)*. Representa el tiempo que tarda el móvil en recorrer una vez la trayectoria cerrada.

A la inversa del periodo se la denomina ***frecuencia*** del movimiento. La denotaremos con la letra f (en Física Moderna se acostumbra a denominarla con la letra griega ν). Se expresa en *hercios (Hz*), o también en *ciclos/segundo*, *vueltas/segundo*, *revoluciones/segundo (rps).* La frecuencia de un movimiento periódico señala, pues, el número de vueltas que el móvil da cada segundo.

Son ejemplos de movimientos periódicos sencillos, pero importantes:
. el MCU estudiado en UI – T 2.6a
. el MAS estudiado en UI – T 2.5c

En ellos, tiene especial interés la magnitud física que se relaciona con el periodo y la frecuencia:

. en el MCU, la velocidad angular ω.

. en el MAS, la pulsación o frecuencia angular ω.

Se expresa en radianes/segundo (rd/s). Recordemos las relaciones: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\ f$

2.- CINEMÁTICA DEL MOVIMIENTO VIBRATORIO

Llamamos movimiento ***vibratorio*** *u* ***oscilatorio*** al de un móvil que se desplaza periódicamente, en trayectoria recta, en torno a un punto de equilibrio.

El movimiento de un péndulo, para oscilaciones de pequeña amplitud, es prácticamente un movimiento oscilatorio. Un cuerpo unido al extremo de un resorte estirado, una vez que se suelta, comienza a oscilar. Las partículas (átomos, iones, ...) de un sólido, unidas entre sí, vibran en torno a posiciones fijas. Similarmente, los átomos de una molécula vibran unos con respecto a otros. Los electrones de una antena radiante o receptora oscilan rápidamente. Finalmente, una comprensión del movimiento vibratorio es de sumo interés para entender los fenómenos ondulatorios, en su generalidad.

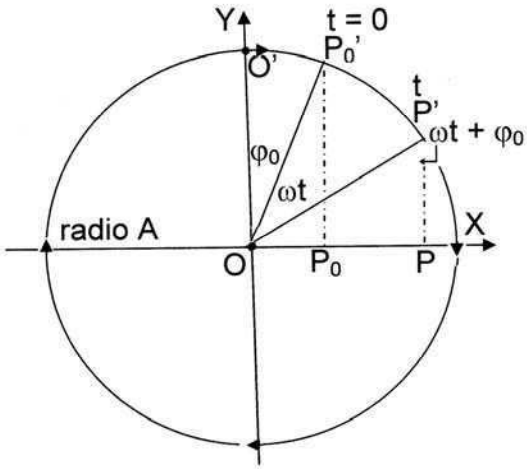
De todos los movimientos oscilatorios, el más importante es el ***movimiento armónico simple*** (MAS), debido a que, además de ser el movimiento más simple de describir matemáticamente, constituye una aproximación muy cercana de muchas oscilaciones encontradas en la naturaleza. En este caso, al móvil se le denomina ***oscilador armónico***.

En este punto, deberás volver a la sección UI – T 2.5c, revisando y estudiando nuevamente los conceptos allí expuestos. Después de este repaso, puedes continuar esta exposición. En ella ya sólo queda complementar lo allí explicado.

A.- El M.A.S. EN RELACIÓN CON EL M.C.U.

El movimiento de un oscilador P, con pulsación ω, puede relacionarse con el de otro punto P' que describe una circunferencia con movimiento circular uniforme, de velocidad angular también ω.

Sea P' el punto móvil sobre una trayectoria circular de radio A, y sea P su proyección sobre el eje X. Sea $P_0^{'}$ su posición en el instante t = 0, y φ_0 la posición angular inicial, tomando O' como origen de ángulos y sentido horario. Su proyección sobre el eje X es P_0.



Supongamos P' dotado de un movimiento circular uniforme, de velocidad angular ω. En un instante t posterior, el punto P' ha descrito un ángulo ωt por lo que su posición angular en dicho instante es $\varphi = \omega t + \varphi_0$. Su proyección P, sobre el eje X, se señala en la figura. Dado que ang(O'OP') = ang(OP'P), la posición de P viene dada por:

$$x(t) = A\ \mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

Vemos pues que *el movimiento armónico simple de un oscilador (P) es el de la proyección de otro punto (P') que recorre uniformemente una circunferencia, de igual centro y de radio igual a la amplitud del oscilador.*

Véanse las magnitudes comunes y su denominación:

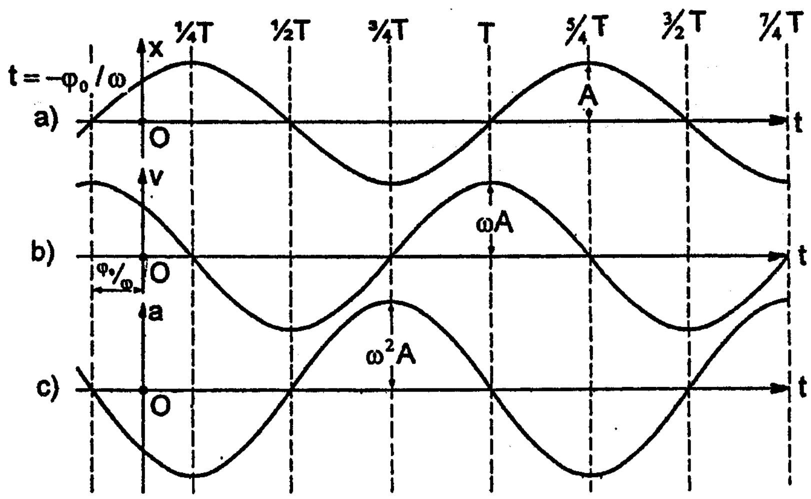
	Circunferencia (MCU): P’	**Eje X (MAS): P**
A	Radio	Amplitud
ω	Velocidad angular	Pulsación o frecuencia angular
φ_0	Posición angular inicial	Fase inicial
$\omega t + \varphi_0$	Posición angular, en el instante t	Fase en el instante t
$x(t) = A.\text{sen}(\omega t + \varphi_0)$	Componente X de su posición	Elongación

B.- DIAGRAMAS DE LA ELONGACIÓN, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

Vimos las expresiones de la elongación, velocidad y aceleración de un oscilador armónico:

$x(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0)$ $\quad v(t) = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0)$ $\quad a(t) = -\omega^2 A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0)$

Las gráficas de estas funciones vienen expresadas en las figuras adjuntas:



Se observa cómo:

- las gráficas de x(t) y de v(t) están desfasadas en 90º. Se dice que la elongación y la velocidad están *en cuadratura* (desfase en $\pi/2$ rd).
- las gráficas de x(t) y de a(t) están desfasadas en 180º. Se dice entonces que la elongación y la aceleración del oscilador se encuentran *en oposición de fase* (desfase en π rd)

C.- EXPRESIONES DIVERSAS DE LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO DEL M.A.S.

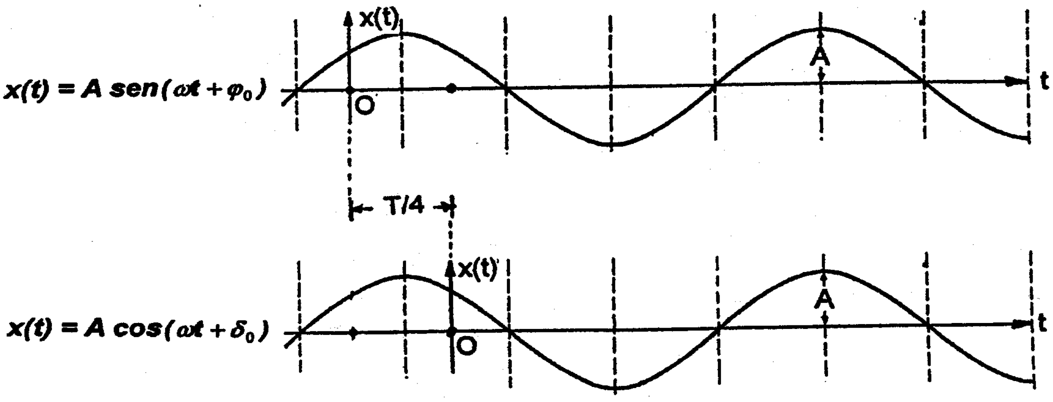
La ecuación de la elongación o posición del oscilador en su trayectoria puede presentar diferentes formas de expresión, equivalentes. (Y lo mismo ocurre con la velocidad y la aceleración). Bueno es conocer su significado.

a) Formas generales ***x(t) = A sen($\omega t + \varphi_0$)*** ***x(t) = A cos($\omega t + \delta_0$)***

Ambas formas son equivalentes: difieren en la fase inicial, al adoptar sistemas de referencia desplazados uno respecto del otro en T/4 (desfase, en $\pi/2$). La relación que existe entre las fases iniciales es: $\varphi_0 = \delta_0 + \pi/2$.

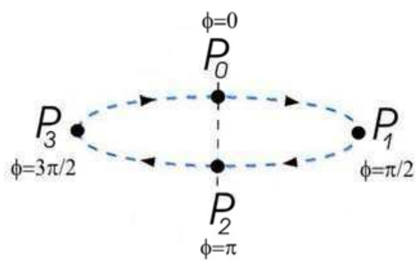
En efecto: $A.\text{sen}(\omega t + \varphi_0) = A.\text{sen}(\omega t + \delta_0 + \pi/2) =$

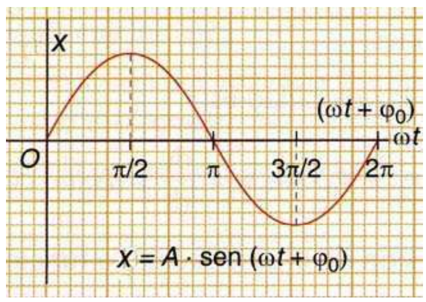
$= A.\text{sen}(\omega t + \delta_0).\cos(\pi/2) + A\cos(\omega t + \delta_0).\text{sen}(\pi/2) = A\cos(\omega t + \delta_0)$



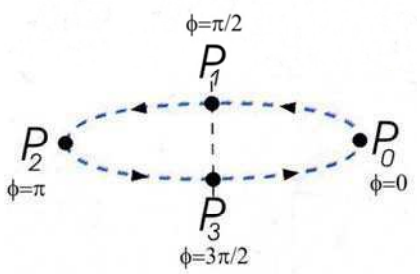
b) Formas particulares

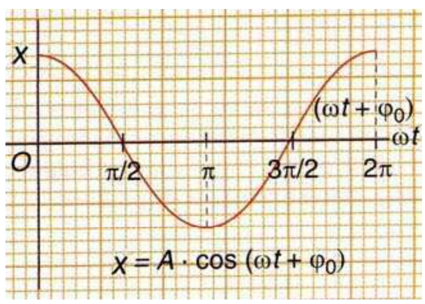
x(t) = A senωt Expresa que la fase inicial es nula, $\varphi_0 = 0$. El oscilador se encuentra inicialmente en el origen O, x(0) = 0, y se mueve hacia la derecha, v(0) = ωA





x(t) = A cosωt En este caso, el oscilador se encuentra inicialmente en el extremo derecho de la trayectoria, x(0) = A, y se mueve hacia la izquierda, v(x=0) = - ωA





3.- DINÁMICA DEL MOVIMIENTO VIBRATORIO

¿Qué tipo de fuerza es capaz de producir un movimiento armónico simple? Supongamos que la masa del oscilador es m y que realiza uno de estos movimientos en el que, como hemos visto, la aceleración es $a = -\omega^2 x$. Tal movimiento debe estar realizado, en virtud de la 2ª ley de Newton, bajo la acción de una fuerza externa tal que F = m a. Por lo tanto:

$F = m\,a = -m\,\omega^2 x$ y llamando $k \equiv m\,\omega^2$ resulta $\boxed{F = -k\,x}$

k se denomina <u>constante recuperadora</u>. En efecto, una fuerza de este tipo está en todo instante y en toda posición orientada hacia el origen O, <u>centro de oscilación</u>; el signo menos indica que tiende siempre a recuperar la posición de equilibrio estable, en O. Vectorialmente: $\vec{F} = -k\,x\,\hat{i}$

Estudiaremos a continuación dos ejemplos especialmente paradigmáticos de este movimiento:

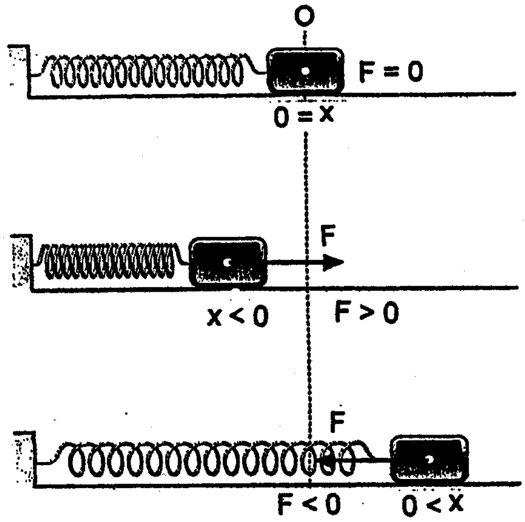
+ el resorte o muelle elástico

+ el péndulo simple

A.- RESORTE ELÁSTICO

El resorte o muelle de la figura representa un oscilador armónico si su comportamiento viene regido por la Ley de Hooke: ***La fuerza recuperadora de un resorte es directamente proporcional a su deformación.*** La expresión matemática de esta ley es:

$$F = -k\,x$$



donde F es la fuerza que ejerce el resorte sobre el oscilador, x la deformación que experimenta el resorte, y k su <u>constante elástica</u>, que es una característica del mismo.

La figura adjunta muestra la relación entre la fuerza ejercida por el muelle y su deformación. Nótese que F y x son de signo contrario, con independencia del sistema de referencia que se tome.

Bajo la acción de esta única fuerza, el oscilador, de masa m, se mueve con una aceleración $a = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$ (tomando $\omega^2 \equiv \frac{k}{m}$) que es la que corresponde a un MAS.

La pulsación, el periodo y la frecuencia de dicho movimiento oscilatorio son:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Nótese que el periodo de las oscilaciones no depende de la amplitud de las mismas; depende sólo de la masa del oscilador y de la constante elástica del resorte.

El trabajo realizado por la fuerza elástica al llevar el oscilador de una posición A (abscisa, x_A) hasta una posición B (abscisa, x_B) se obtiene así:

$$W_{AB} = \int_{AB} F.dx = -k\int_{x_A}^{x_B} x.dx = -k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x_A}^{x_B} = \frac{1}{2}k.x_A^2 - \frac{1}{2}k.x_B^2$$

El valor de este trabajo, vemos, sólo depende de las posiciones de A y B, y no de sus posiciones intermedias. Por tanto, _la fuerza elástica es conservativa._

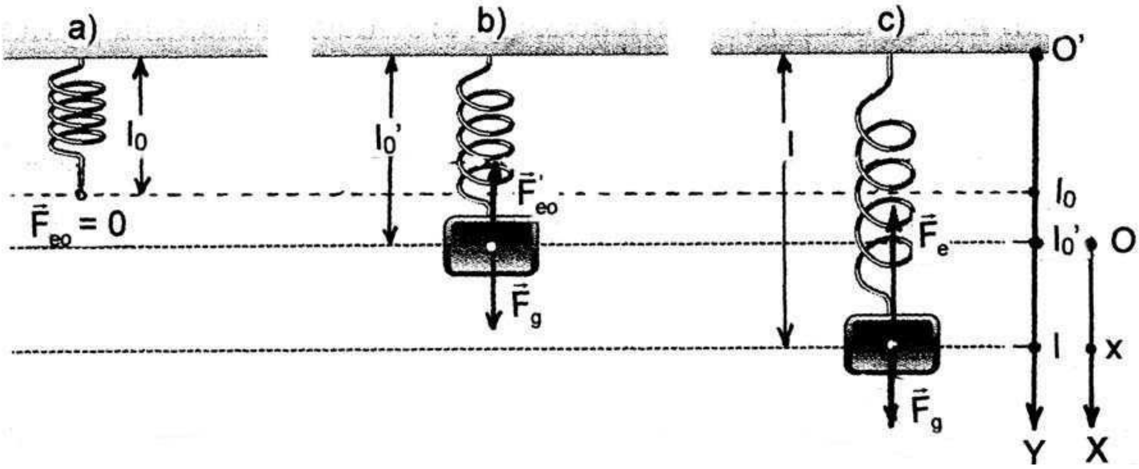
Entonces, esta fuerza elástica deriva de una función potencial, que llamamos *energía potencial elástica* cuyo valor quedó calculado en UI – T 3.9b

En este punto, deberás volver a la sección UI – T 3.9b, revisando y estudiando nuevamente los conceptos allí expuestos. Después de este repaso, puedes continuar esta exposición.

Ejercicio: oscilaciones en un resorte vertical: Consideremos un resorte vertical. Al colgar de él la masa oscilante m, no sólo existe la fuerza elástica F_e actuando sobre ella sino también la fuerza debida a su peso F_g = mg. ¿Es su movimiento también un MAS?

La tesis que se desea probar es que en estos casos (resorte vertical) el estudio es el mismo aplicado al resorte horizontal (no se considera fuerza vertical), con tal de tomar como centro de oscilación el correspondiente al oscilador en equilibrio, cargado con su masa y en posición vertical.

Observemos las gráficas:



En las gráficas, tomamos como eje del movimiento el eje O'Y, vertical hacia abajo, con origen en O'.

Estas gráficas expresan:

a) Situación del resorte, sin masa oscilatoria. Equilibrio.
Longitud del muelle, l_0 Fuerza elástica, $\vec{F}_{eo} = 0$

b) Situación del resorte, con masa oscilatoria. Equilibrio.
Longitud del muelle, l_0' Fuerza elástica, $\vec{F}_{eo}' = -k(l_o' - l_o).\vec{j}$ Peso, $\vec{F}_g = mg.\vec{j}$

El equilibrio implica: $\vec{F}_g + \vec{F}_{eo}' = 0$ es decir $mg = k(l_o' - l_o)$ (*)

c) Situación del resorte, con masa oscilatoria y en movimiento, en un instante t:

Longitud del muelle, l Fuerza elástica, $\vec{F}_e = -k(l - l_o).\vec{j}$ Peso, $\vec{F}_g = mg.\vec{j}$

Aplicando la 2ª ley de Newton: $\vec{F}_e + \vec{F}_g = m.\vec{a}$

$-k(l - l_o).\vec{j} + mg.\vec{j} = m.\vec{a}$ y teniendo en cuenta (*): $-k(l - l_o).\vec{j} + k(l'_o - l_o).\vec{j} = m.\vec{a}$

Simplificando:

$$-k(l - l'_o).\vec{j} = m.\vec{a}$$

Cambiemos el sistema de referencia. Sea el nuevo eje OX, con el origen en O y sentido vertical hacia abajo; por tanto, $\vec{j} = \vec{i}$. Llamemos x a la nueva variable; entonces: $x = l - l'_o$

Por tanto:

$$-kx.\vec{i} = m.\vec{a} \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x \qquad \text{habiendo tomado } \omega^2 \equiv \frac{k}{m}$$

$\Rightarrow$ el movimiento es un MAS con centro en O, siendo este centro de oscilación el de la posición del oscilador, cargado el muelle con la masa m, y en equilibrio.

La pulsación, el periodo y la frecuencia son obviamente:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

B.- PÉNDULO SIMPLE

El *péndulo simple* está constituido por una masa puntual suspendida de un punto fijo mediante un hilo, de longitud L, inextensible y de masa despreciable. Cuando se separa de su posición vertical (posición de equilibrio) y se suelta, el péndulo oscila en un plano vertical, describiendo un movimiento periódico y oscilatorio, cuyas características se estudian a continuación.

Las fuerzas que actúan sobre la masa *m* del péndulo son: su *peso* $\vec{P}$ y la *tensión de la cuerda* $\vec{T}$ (no se tiene en consideración la fricción con el aire).

En la figura se muestra un péndulo simple:

+ a la izquierda, en equilibrio y en reposo, verificándose:

$$\sum \vec{F} = 0 \text{ o sea } \vec{P} = -\vec{T} \Rightarrow P = T$$

+ a la derecha, en movimiento, verificándose:

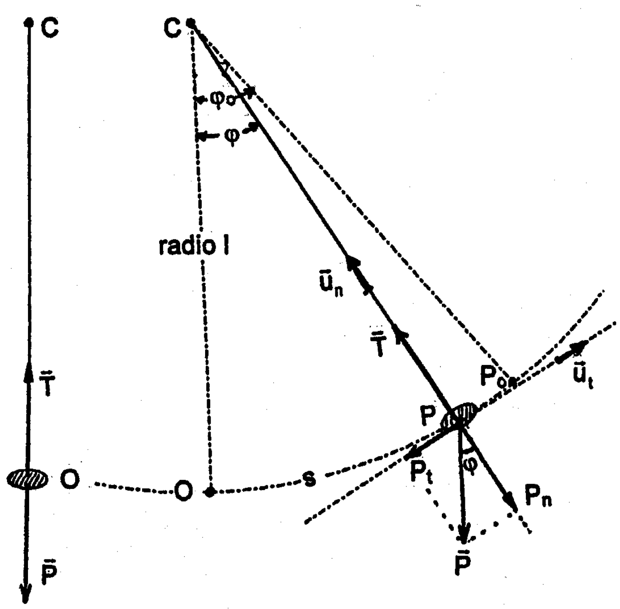
$$\sum \vec{F} = m.\vec{a} \quad \text{o sea} \quad \vec{P} + \vec{T} = m.\vec{a}\ .$$

En el instante t el péndulo se halla en P. El arco s = OP representa su posición lineal, cuando se encuentra separado un ángulo φ de su posición de equilibrio O. Se verifica $s = L.\varphi$ (φ en rd).

Tomemos como sistema referencial el sistema intrínseco {centro en P; direcciones normal $\vec{u}_n$ y tangencial $\vec{u}_t$}. Descompongamos el peso $\vec{P}$ según ambos ejes:

$$\vec{P} = P_n\vec{u}_n + P_t\vec{u}_t = -mg.\cos\varphi.\vec{u}_n - mg.\text{sen}\varphi.\vec{u}_t$$

(los signos menos son debidos al sentido opuesto de ambas componentes respecto de los vectores unitarios $\vec{u}_n$ y $\vec{u}_t$ del sistema referencial)



Entonces, la ecuación de la dinámica, $\sum \vec{F} = m.\vec{a}$, lleva a la expresión

$$\vec{P} + \vec{T} = (T - mg.\cos\varphi).\vec{u}_n - mg.\text{sen}\varphi.\vec{u}_t$$

Descomponemos pues el movimiento:

+ según la dirección normal o centrípeta:

$$T - mg.\cos\varphi = ma_n \wedge a_n = \frac{v^2}{L} \quad \Rightarrow \quad T = m(v^2/L + g.\cos\varphi)$$

+ según la dirección tangencial:

$$-mg.\text{sen}\varphi = ma_t \quad \Rightarrow \quad a_t = -g.\text{sen}\varphi \qquad (°)$$

Esta 2ª ecuación, que rige el movimiento tangencial, no es de fácil resolución. Sin embargo, si las oscilaciones del péndulo son de *muy pequeña amplitud* (valores de $\varphi_o < 10°$), entonces los valores del seno del ángulo φ son prácticamente iguales a los de φ en radianes (ver tabla adjunta), por lo que en este supuesto (pequeñas oscilaciones): sen $\varphi \approx \varphi$

Comparación de los valores de un ángulo en radianes y el seno de mismo.
%: diferencia en tanto por ciento entre φ en radianes y sen φ.

φ (°)	φ (rd)	sen φ	%
0	0.0000	0.0000	0.00
2	0.0349	0.0349	0.02
5	0.0873	0.0872	0.13
10	0.1745	0.1736	0.51
15	0.2618	0.2588	1.15

En estos casos, la ecuación (°) se puede escribir:

$$a_t = -g\varphi$$

y teniendo en cuenta que s = l.φ , se tiene: $\boxed{a_t = -\frac{g}{L}s}$

que es de la forma: $a = -\omega^2 x$ donde $\omega^2 = \frac{g}{L}$

Ello prueba que *para pequeñas oscilaciones el péndulo se comporta como un oscilador armónico*, describiendo un movimiento armónico simple. La *pulsación*, el *periodo* y la *frecuencia* del péndulo simple es, entonces:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

Es importante resaltar que, de acuerdo con estas relaciones, *el periodo de oscilación de un péndulo simple es independiente de su masa y de la amplitud de las oscilaciones*, siempre que éstas sean pequeñas.

ACTIVIDADES DESARROLLADAS

1.- Un resorte se alarga 2 cm, cuando se le cuelga un cuerpo de 10 kg de masa. A continuación se le añade una masa de otros 10 kg, se le da al conjunto un tirón hacia abajo de 3 cm y se le deja oscilar libremente. Determina:

a) la pulsación, el periodo y la frecuencia del movimiento. Expresa la ecuación del movimiento, x(t).

b) la posición, la velocidad, la aceleración y la fuerza recuperadora a los 0'5 s de iniciado el movimiento.

c) la diferencia de fase entre este instante y el inicial.

a) La ecuación de este MAS más adecuada es $x(t) = A \cos \omega t$, eligiendo un sistema de referencia hacia abajo (fase inicial $\varphi_o = 0$, pues el movimiento comienza cuando el oscilador se halla en su punto más bajo). Entonces, A = 3 cm = 0,03 m

La constante elástica se calcula teniendo en cuenta que $mg = k\,\Delta l$, siendo m = 10 kg y $\Delta l = 0{,}02$ m:

$$\Rightarrow \quad k = \frac{mg}{\Delta l} = \frac{10x9{,}8}{0{,}02} = 4900\,\text{N/m}$$

La pulsación, el periodo y la frecuencia son, siendo ahora m = 20 kg:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4900}{20}} = 15{,}65\,\text{rd/s} = 4{,}98\pi\ \text{rd/s} \cong \boldsymbol{5\pi\ rd/s} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2x3{,}1416}{15{,}65} = \boldsymbol{0{,}40\ s}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}40} = \boldsymbol{2{,}49\ Hz}$$

La ecuación del movimiento es: ***$x(t) = 0{,}03 \cos(5\pi t)$***

b) En función del tiempo,

$$\begin{array}{rcl} x(t) = A\cos(\omega\, t) & \rightarrow & x(t) = 0{,}03\cos(5\pi t) \\ v(t) = -\omega A \,\text{sen}(\omega\, t) & \rightarrow & v(t) = -\,0{,}47\,\text{sen}(5\pi t) \\ a(t) = -\omega^2 A\cos(\omega\, t) & \rightarrow & a(t) = -7{,}35\cos(5\pi t) \\ F(t) = m\,a = -m\omega^2 A\cos(\omega\, t) & \rightarrow & F(t) = -147\cos(5\pi t) \end{array}$$

En el instante t = 0,5 s:

$x(0{,}5) = 0{,}03\cos(5\pi.0{,}5) = 0{,}03\cos(2{,}5\pi) = 0{,}03\cos(2\pi + \pi/2) = 0{,}03\cos(\pi/2) =$ ***0 metros***

$v(0{,}5) = -\,0{,}47\,\text{sen}(5\pi.0{,}5) = -\,0{,}47\,\text{sen}(\pi/2)$ ***= –0,47 m/s***

$a(0{,}5) = -\,7{,}35\cos(5\pi.0{,}5) = -7{,}35\cos(\pi/2) =$ ***$0\ m/s^2$***

$F(0{,}5) = -147\cos(5\pi.0{,}5) = -147\cos(\pi/2) =$ ***0 N***

$\Rightarrow$ el oscilador está en el centro de oscilación; pero se mueve hacia arriba con una velocidad de 0,47 m/s. En esta posición, la fuerza elástica que produce el movimiento es nula.

c) El desfase es: $\Delta\phi = \phi(0{,}5) - \phi(0) = (5\pi.0{,}5) - 0 =$ ***$2{,}5\,\pi$ rd = 450º***

2.- Escribir la ecuación del movimiento vibratorio de un oscilador que en el instante t = 2 s se encuentra 10 cm a la izquierda del centro de oscilación, siendo su velocidad 3 m/s hacia la izquierda, y que realiza 15 oscilaciones por segundo.

$$f = 15\ \text{Hz} \qquad \omega = 2\pi f = 30\pi\ \text{rd/s}$$

$$x(t) = A\,\text{sen}(30\pi t + \varphi_o) \ \wedge\ x(2) = -0{,}1 \ \Rightarrow\ -0{,}1 = A\,\text{sen}(60\pi + \varphi_o)$$

$$\Rightarrow\ \text{sen}(60\pi + \varphi_o) = -\frac{0{,}1}{A} = -\frac{1}{10.A} \qquad \Rightarrow\ \text{sen}\,\varphi_o = -\frac{1}{10.A}$$

$$v(t) = 30\pi A\cos(30\pi t + \varphi_o) \ \wedge\ v(2) = -3 \ \Rightarrow\ -3 = 30\pi A\cos(60\pi + \varphi_o)$$

$$\Rightarrow\ \cos(60\pi + \varphi_o) = -\frac{3}{30\pi.A} = -\frac{1}{10\pi.A} \ \Rightarrow\ \cos\varphi_o = -\frac{1}{10\pi.A}$$

Elevando al cuadrado y sumando: $1 = \left(-\frac{1}{10.A}\right)^2 + \left(-\frac{1}{10\pi.A}\right)^2 \ \Rightarrow\ 100A^2 = 1 + \frac{1}{\pi^2}$

$\Rightarrow\ A = 0{,}105\ \text{m} = 10{,}5\ \text{cm}$

Dividiendo miembro a miembro sen $\varphi_o = -\frac{1}{10.A}$ cos $\varphi_o = -\frac{1}{10\pi.A}$ resulta tg $\varphi_o = \pi$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \varphi_o = 72{,}3432° = 72°20'36'' \\ \varphi_0 = 252{,}3432° = 252°20'36'' \end{cases}$$

De ambos valores, sólo es válido el 2º porque sólo para él el seno y el coseno son negativos. Así pues, $\varphi_o = 252{,}3432° = 1{,}40\,\pi\ \text{rd} = 7/5\,\pi\ \text{rd}$

$\Rightarrow$ ***x(t) = 10,5 senπ(30t + 7/5) centímetros***

3.- Una masa puntual de 10 g está sujeta a un muelle que vibra con una frecuencia de 3 Hz. En el instante inicial pasa por el centro de vibración con una velocidad de 5 cm/s en sentido negativo. Determina:

a) el tiempo que debe transcurrir hasta que alcance la velocidad cero.
b) la ecuación del movimiento.
c) la expresión de la energía cinética, en función del tiempo.
d) la aceleración en el instante en el que se anula la velocidad.

a) Frecuencia, f = 3 Hz Periodo, $T = \frac{1}{3}$ s Pulsación, $\omega = 2\pi f = 6\pi$ rd/s

Como en el instante inicial, t = 0, pasa por el centro, x = 0, posición en la que la velocidad es máxima, adquirirá velocidad nula cuando se encuentre en el extremo izquierdo, es decir tras un cuarto de periodo: $t = \frac{1}{4}T = \boldsymbol{\frac{1}{12}\ s}$

b) La ecuación general del movimiento es $x(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_o) \ \rightarrow\ x(t) = A\,\text{sen}(6\pi t + \varphi_o)$

La velocidad es $v(t) = \omega A\cos(\omega t + \varphi_o) \ \rightarrow\ v(t) = 6\pi A\cos(6\pi t + \varphi_o)$

Para t = 0, $0 = A\,\text{sen}\varphi_o$ y $-0{,}05 = 6\pi A\cos\varphi_o$ La primera relación implica que $\begin{cases} \varphi_o = 0 \\ \varphi_o = \pi \end{cases}$

La segunda, $A\cos\varphi_o = -\frac{0{,}05}{6\pi} = -0{,}00265 < 0$ exige que de ambas soluciones sólo sea válida la segunda, $\varphi_o = \pi$. De acuerdo con ello, $A = 2{,}65.10^{-3}$ m = 2,65 mm.

Al mismo resultado se llega pensando que en t =0 la masa puntual se halla en x = 0, dotada de velocidad máxima, 5 cm/s. Entonces:

$$v_{max} = \omega A \Rightarrow A = \frac{v_{max}}{\omega} = \frac{0{,}05}{6\pi} = 2{,}65\text{x}10^{-3} \text{ m} = 2{,}65 \text{ mm}$$

La ecuación de este movimiento oscilatorio es pues:

$$x(t) = 2{,}65\text{x}10^{-3} \operatorname{sen}(6\pi t + \pi) = -2{,}65\text{x}10^{-3} \operatorname{sen}(6\pi t)$$

$$\boldsymbol{x(t) = -2{,}65 \operatorname{sen}(6\pi t) \quad mm}$$

c) La expresión de la velocidad es $v = \frac{dx}{dt} = -6\pi \cdot 2{,}65\text{x}10^{-3} \cos(6\pi t) = -5\text{x}10^{-2} \cos(6\pi t)$

La energía cinética es:

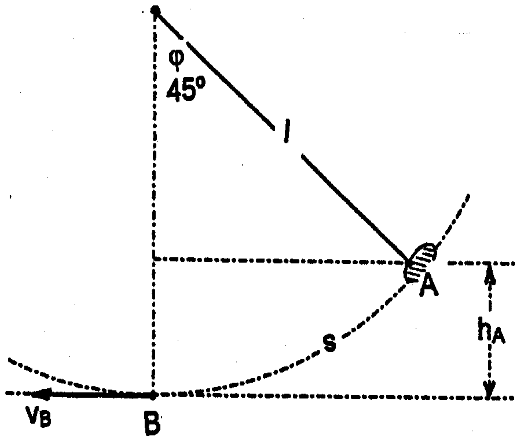
$$E_c = \tfrac{1}{2} mv^2 = \tfrac{1}{2} \text{x}0.01\text{x}[-5\text{x}10^{-2} \cos(6\pi t)]^2 = 1{,}25\text{x}10^{-5} \cos^2(6\pi t)$$

$$\boldsymbol{E_c(t) = 1{,}25\text{x}10^{-5} \cos^2(6\pi t) \quad julios}$$

d) En el instante en que se anula la velocidad (extremos del movimiento) la aceleración es máxima y vale:

$$a_{max} = \omega^2 A = 36\,\pi^2 \cdot 2{,}65 \cdot 10^{-3} = \boldsymbol{0{,}942\ m/s^2}$$

4.- Suponiendo despreciable la fricción del aire, calcula la velocidad de un péndulo simple de 1,2 m de longitud cuando pasa por la vertical si se le suelta desde una desviación de 45º. Calcula dicha velocidad, primeramente utilizando el método de energías; luego, aplicando las fórmulas del péndulo simple. Halla el % de error cometido en este segundo caso.



a) Se conserva la energía mecánica; por tanto:

$\Delta E_m = 0$ o sea $E_c(B) = E_{pg}(A)$ o sea $\tfrac{1}{2} m v_B^2 = mgh_A$

Según la figura: $h_A = l(1 - \cos\varphi)$; por tanto:

$\tfrac{1}{2} m v_B^2 = mg\, l(1 - \cos\varphi)$ de donde:

$v_B = \sqrt{2gl(1-\cos\varphi)} = \sqrt{2\text{x}9{,}8\text{x}1{,}2(1-\cos 45^\circ)} = \boldsymbol{2{,}625\ m/s}$

b) Según las fórmulas del movimiento pendular:

$$v_B = v_{max} = \omega A = \sqrt{\frac{g}{l}}\, s = \sqrt{\frac{g}{l}}\, l.\varphi = \sqrt{gl}\,.\varphi$$

$$= \sqrt{9{,}8\text{x}1{,}2}\,\text{x}\frac{45}{180}\text{x}3.14 = \boldsymbol{2{,}693\ m/s}$$

c) Error, $\varepsilon_r = 100\text{x}\,\frac{2{,}693 - 2{,}625}{2{,}625} = \boldsymbol{2{,}6\%}$

5.- A Galileo le propusieron este problema: ¿Cómo hallar la altura de una cúpula inaccesible, de la que cuelga, a 6 m del suelo, una lámpara? Se podía variar la longitud del cable de suspensión de la lámpara.

Galileo hizo oscilar la lámpara, inicialmente a 6 m del suelo. Contó 10 oscilaciones y midió el tiempo invertido en ellas: 134,6 s. Varió la longitud del cable en 1 m menos, e hizo oscilar de nuevo la lámpara, invirtiendo ahora en 10 oscilaciones 133,1 s. Entonces:

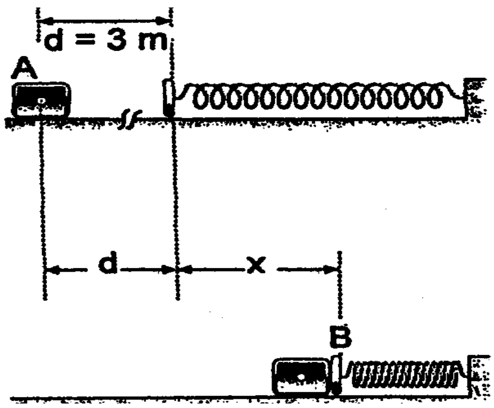
1ª exper.: $T_1 = \frac{134{,}6}{10} = 13{,}46\,\text{s}$ $\quad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ $\quad l = \frac{g}{4\pi^2}T_1^2$

2ª exper.: $T_2 = \frac{133{,}1}{10} = 13{,}31\,\text{s}$ $\quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l-1}{g}}$ $\quad l - 1 = \frac{g}{4\pi^2}T_2^2$

Dividiendo estas dos expresiones, y simplificando, resulta: $\frac{l}{l-1} = \frac{T_1^2}{T_2^2}$ $\quad \frac{l}{l-1} = \frac{13{,}46^2}{13{,}31^2} = 1{,}023$

$\rightarrow$ l = 45,12 m La altura H de la cúpula es entonces H = 45,12 + 6 = ***51,12 metros***

6.- En una superficie horizontal se prepara un resorte, también horizontal, cuya constante elástica es 80 N/m. Desde un punto que dista 3 m del muelle se lanza un cuerpo de 1,2 kg, con velocidad de 4 m/s, hacia el muelle. Calcula la máxima compresión del resorte, sabiendo que el coeficiente de rozamiento del cuerpo con el suelo es 0,1.



Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en su recorrido son:

+ Su peso (fuerza conservativa)

+ La normal ejercida por el suelo; no realiza trabajo, pues es perpendicular al desplazamiento.

+La ejercida por el muelle, que es conservativa.

+ La fuerza de rozamiento con el suelo, que actúa en todo el desplazamiento, y es no conservativa.

Teorema de la energía mecánica: $\quad W_{roz} = \Delta E_m$

$$\Delta E_m = E_{pe}(B) - E_c(A) = ½\,k\,x^2 - ½\,m\,v_A^2 = 40\,x^2 - 9{,}6$$

$$W_{roz} = -\,\mu.mg.(d + x) = -\,0{,}1\,.\,1{,}2\,.\,9{,}8\,.\,(3 + x) = -\,3{,}528 - 1{,}176\,x$$

Igualando, $40\,x^2 - 9{,}6 = -\,3{,}528 - 1{,}176\,x$ $\quad 40\,x^2 + 1{,}176\,x - 6{,}072 = 0$ $\quad$ ***x = 0,375 metros***

7.- Una partícula describe un MAS sobre una trayectoria rectilínea. En el punto x = 3 cm su velocidad es de 9 cm.s^{-1}, mientras que en el punto x = 6 cm es de 4 cm.s^{-1}. Calcula la frecuencia del movimiento vibratorio y su amplitud.

$x(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_o)$ $\qquad v(t) = \omega A\cos(\omega t + \varphi_o)$

+ Punto x = 3 cm, $\quad 0{,}03 = A\,\text{sen}(\omega t_A + \varphi_o)$ $\qquad 0{,}09 = \omega A\cos(\omega t_A + \varphi_o)$

$\text{sen}(\omega t_A + \varphi_o) = \dfrac{0{,}03}{A}$ $\qquad$ $\cos(\omega t_A + \varphi_o) = \dfrac{0.09}{\omega A}$

Elevando al cuadrado y sumando: $\qquad 1 = \dfrac{0{,}0009}{A^2} + \dfrac{0{,}0081}{\omega^2 A^2}$ $\qquad$ (*)

+ Punto x = 6 cm, $\quad 0{,}06 = A\,\text{sen}(\omega t_B + \varphi_o) \qquad 0{,}04 = \omega A \cos(\omega t_B + \varphi_o)$

$\text{sen}(\omega t_B + \varphi_o) = \dfrac{0{,}06}{A}$ $\qquad$ $\cos(\omega t_B + \varphi_o) = \dfrac{0{,}04}{\omega A}$

Elevando al cuadrado y sumando: $\qquad 1 = \dfrac{0{,}0036}{A^2} + \dfrac{0{,}0016}{\omega^2 A^2}$ $\qquad$ (**)

Igualando (*) y (**), y simplificando A^2, resulta: $\quad 0{,}0009 + 0{,}0081/\omega^2 = 0{,}0036 + 0{,}0016/\omega^2$

$$\omega = \sqrt{\frac{65}{27}} = 1{,}552 \text{ rd/s} \qquad f = \frac{\omega}{2\pi} = 0{,}247 \text{ Hz}$$

Despejando A^2, por ejemplo en (*), se tiene: $\quad A^2 = 0{,}0009 + \dfrac{0{,}0081}{(1{,}552)^2} = 0{,}00426$

$$A = 0{,}0653 \text{ m} = 6{,}53 \text{ cm.}$$

Podemos resolver este problema, también, por métodos energéticos. En efecto, el sistema es conservativo, por lo que la energía mecánica en el punto x = 3 cm es igual a la del punto x = 6 cm:

$$E_c(A) + E_{pe}(A) = E_c(B) + E_{pe}(B) \qquad \to \qquad \tfrac{1}{2} m v_A^2 + \tfrac{1}{2} k x_A^2 = \tfrac{1}{2} m v_B^2 + \tfrac{1}{2} k x_B^2$$

$$\to \quad v_A^2 - v_B^2 = \frac{k}{m}(x_B^2 - x_A^2).$$

Recordando que $\omega^2 \equiv \dfrac{k}{m}$ resulta: $\quad \omega = \sqrt{\dfrac{v_A^2 - v_B^2}{x_B^2 - x_A^2}} = 1{,}552$ rd/s $\quad \to \quad$ *f = 0,247 Hz*.

El valor de la amplitud A puede calcularse fácilmente teniendo presente que en cualquier punto la energía cinética es:

$$E_c = \tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2} k (A^2 - x^2) \;\to\; A^2 = x^2 + \frac{m}{k} v^2 = = x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = 0{,}0009 + \frac{0{,}0081}{(1{,}552)^2} = 0{,}00426$$

$$\to \qquad A = 0{,}0653 \text{ m} = \boldsymbol{6{,}53\ cm}$$