11.3. Coloreado de grafos

Vamos a poner algo de color en el mundo de los grafos. El pictórico (y pintoresco) lenguaje del coloreado de grafos que presentaremos se mostrará bien útil y práctico, pues permite, por ejemplo, diseñar horarios eficientes o contar listas con restricciones. Advertimos cariñosamente al lector de que debe tener la precaución de escoger adecuadamente dónde y ante quién exhibe los conocimientos técnicos avanzados que va a aprender en esta sección: al fin y a la postre, la plasmación de la abstracción matemática de este lenguaje lo llevará a pintar en un papel rayas y puntos con lápices de colores, a mirarlos fijamente, a levantarse de la mesa, pensar peripatéticamente, volverse a sentar y quizás, sólo quizás, escoger un color...

Además de un grafo G, dispondremos de una *paleta de colores*, esto es, un conjunto $S = \{a, b, \dots\}$ a cuyos elementos nos referiremos como los *colores*. El uso de esta terminología tiene su explicación, que veremos en un momento; pero lo que realmente utilicemos (colores, letras u otros símbolos) no será relevante, y, por supuesto, qué colores tampoco será significativo.

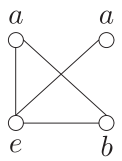
Una **coloración** de G con los colores de S consistirá en asignar a cada vértice de G un elemento de S, es decir, un color, de manera que *los extremos de cada arista reciban colores distintos*. Es decir, no se trata de una asignación de colores arbitraria y sin restricciones. Formalmente, una coloración de G con colores de S es una aplicación

$$\gamma : V(G) \longrightarrow S$$

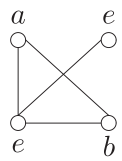
de forma que $\gamma(v) \neq \gamma(w)$ si $\{v, w\} \in A(G)$. El valor de $\gamma(v)$ es el color que recibe el vértice v en la coloración. Coloración es la acción de **colorear**[28].

Por ejemplo, si tenemos el grafo G que representamos más abajo, y disponemos de la paleta de colores $S = \{a, b, c, d, e, f\}$, la asignación de colores de la izquierda es una coloración, pero no lo es la de la derecha, pues hay una arista con el mismo color e en sus dos vértices.

SÍ



NO

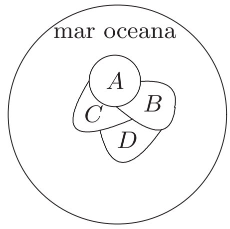


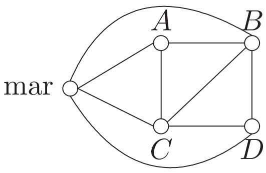
El concepto de coloración es *invariante por isomorfismo*. Es decir, si tenemos dos grafos isomorfos y una coloración del primero, tendremos una coloración del segundo con el siguiente (obvio) procedimiento: a cada vértice del segundo grafo le asignamos el color que lleva el vértice del primer grafo que le corresponde por el isomorfismo.

El lector atento habrá observado que, en realidad, deberíamos hablar de *coloreado de vértices*. Puesto que un grafo viene dado por vértices y aristas, nos preguntamos, en sintonía con el perspicaz lector, por qué no colorear aristas. Se puede, claro, y la restricción es que aristas que concurran en un vértice han de llevar colores distintos. No desarrollaremos esta cuestión en el texto en sí, aunque varios ejercicios (ejercicios 11.3.26–11.3.30) están dedicados a este asunto.

[28] Perdón por la insistencia y la pedantería.

La cromática terminología que vamos a emplear en esta discusión tiene su origen en un problema clásico, conocido como el **problema de los cuatro colores**. Acepte el lector que el dibujo de la derecha es un mapa de las distintos países que conforman un cierto continente. Queremos colorear el mapa, es decir, asignar a cada país (y también a la zona marítima) un color de manera que regiones que compartan frontera no lleven el mismo color (para que no se confundan).





Traducimos la información del mapa a un grafo: los vértices serán las distintas regiones y entre dos vértices habrá una arista si los países correspondientes tienen frontera en común. Véase, a la izquierda, el grafo correspondiente al mapa anterior. Podemos colorear el mapa (o, equivalentemente, el grafo) con cinco colores, desde luego, pero, como el lector comprobará, también con *cuatro* (asigne por ejemplo, y como parece obligado, el color azul —marino, por supuesto— a la zona marítima, el rojo a las regiones A y D, el verde al territorio B y, finalmente, el marrón a C).

Sorprendentemente, sea cual sea el mapa considerado, el grafo que se obtiene a partir de él con el procedimiento indicado anteriormente posee unas características muy especiales: es lo que se llama un *grafo plano*. Y lo que afirma el *teorema de los cuatro colores* es, qué otra cosa podía decir, que todo grafo plano puede colorearse utilizando únicamente *cuatro* colores.

La afirmación en sí nos deja pasmados: ¿sea cual sea el grafo plano?; ¿y por qué todo mapa tiene asociado un grafo de los que hemos dado en llamar planos? Hay mucho que hablar sobre el asunto, sobre la propia historia del teorema, y sobre sus fascinantes conexiones. Todo esto lo haremos en el sección 11.5.

Pero el lenguaje de las coloraciones de grafos no sólo sirve para colorear mapas (tarea, en todo caso, que pudiera no resultar del todo apasionante), sino que permite describir y abordar algunas cuestiones combinatorias a las que hicimos referencia en capítulos anteriores.

A. El problema de la asignación de horarios

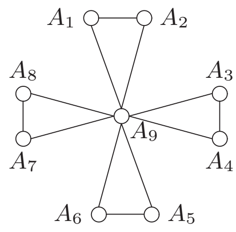
Empezamos considerando una cuestión, la confección de horarios, que llamará la atención[29] de todo aquel que se haya visto involucrado en alguna ocasión en tareas organizativas. Lo ilustramos con un ejemplo.

EJEMPLO 11.3.1 *El primer curso de licenciatura consta de nueve asignaturas, $A_1, \dots, A_9$. Hay alumnos que están matriculados, simultáneamente, en las asignaturas A_1 y A_2, A_3 y A_4, A_5 y A_6 y A_7 y A_8. Además, todo alumno que se matricule en alguna de las asignaturas $A_1, \dots, A_8$ debe cursar, obligatoriamente, la asignatura A_9. Se trata de diseñar un horario, utilizando el menor número de horas posible, que permita a todos los alumnos asistir a las clases de las asignaturas en las que esté matriculado.*

Observemos que un horario válido es una lista de nueve posiciones, en las que los símbolos son las horas que tengamos a nuestra disposición, pero con restricciones sobre los símbolos que podemos utilizar en ciertas posiciones.

[29] O quizás le haga revivir pesadillas.

Por ejemplo, si la primera y segunda posiciones contienen las horas para las asignaturas A_1 y A_2, entonces no podrán llevar el mismo símbolo. La traducción a nuestro lenguaje de grafos de la información sobre asignaturas e incompatibilidades queda resumida en el grafo en "aspas de molino" que dibujamos a la derecha. Ahora, un horario válido no es sino una coloración del grafo (los colores serán las horas disponibles). Desde luego, con nueve colores se puede colorear. Pero lo que nos interesa, justamente, es colorear con pocos colores para que el horario sea eficiente. El lector podrá construir, sin mucha dificultad, una coloración del grafo que utiliza exactamente tres colores, y cerciorarse de que no puede hacerlo con sólo dos colores. ♣

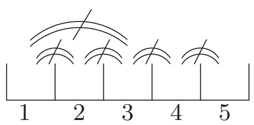


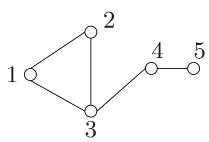
B. Listas con restricciones

La confección de horarios del ejemplo anterior no es sino un caso particular de una cuestión más general: la construcción de listas con restricciones (sobre posiciones). El lenguaje de coloreado permite abordar de manera eficaz esta cuestión, que aún teníamos pendiente (véase, por ejemplo, la discusión de la subsección 2.2.1). Porque, al fin y al cabo,

> colorear con k colores un grafo G con vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$ es lo mismo que formar listas con repetición permitida de longitud n con los símbolos (colores) $\{a_1, \dots, a_k\}$, de manera que si $\{v_i, v_j\} \in A(G)$, los símbolos que aparezcan en las posiciones i y j de la lista sean distintos.

Por ejemplo, las 5-listas con las restricciones que simbólicamente hemos representado en el dibujo más a la izquierda se corresponden con las coloraciones del grafo de la derecha:





Colorear el grafo lineal L_n con, digamos, los colores $\{a, b, c\}$ es lo mismo que formar listas con repetición permitida de longitud n con los símbolos $\{a, b, c\}$ de manera que en posiciones consecutivas haya símbolos distintos. Las listas sin repetición de longitud n formadas con k símbolos ($k \geq n$) se corresponden con las coloraciones del grafo completo K_n con k colores.

C. Particiones en bloques

Las coloraciones del grafo vacío N_n con k colores son asignaciones de color sin restricción alguna. Un coloreado de N_n que use *exactamente* k colores equivale a repartir los elementos del conjunto $\{1, \dots, n\}$ en k bloques no vacíos, para luego etiquetar cada bloque con un número de 1 a k. La siguiente generalización será útil en ciertos argumentos sobre coloreado:

> colorear un grafo G con vértices $\{1, \dots, n\}$ con *exactamente* k colores dados (es decir, usándolos todos) es lo mismo que partir el conjunto $\{1, \dots, n\}$ en k bloques no vacíos (cada bloque lleva los vértices que van con el mismo color), de manera que cada dos elementos (vértices) de un bloque no sean vecinos en G. A cada bloque le asignamos un color distinto, de entre los k disponibles.

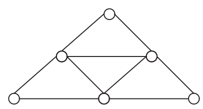
11.3.1. Coloreado eficiente: el número cromático

Como el ejemplo 11.3.1 sobre la asignación de horarios sugería, nos interesan coloraciones con poco colores... y cuantos menos, mejor. El número óptimo de colores que se pueden utilizar es una característica muy importante asociada a un grafo.

Definición 11.3 *El **número cromático** de un grafo G, que denotaremos por $\chi(G)$, es el mínimo número de colores necesario para colorear G.*

El análisis del ejemplo 11.3.1 nos dice que el número cromático del grafo allí dibujado (el de las aspas de molino) es 3, porque lo podemos colorear con 3 colores, pero no con 2. De manera que *hacen falta y bastan* tres horas para impartir esas asignaturas sin conflictos.

Una primera observación es que el número cromático es *invariante por isomorfismos*. Es decir, si G y G' son grafos isomorfos, entonces $\chi(G) = \chi(G')$. La razón es que, como ya hemos comentado, el propio isomorfismo traslada coloraciones en G en coloraciones en G'.



El grafo que aparece a la derecha es protagonista en algunas de las discusiones matemáticas de la película[30] *El indomable Will Hunting*. Su número cromático es 3. Obsérvese que con únicamente dos colores no podríamos pintar los vértices de cualquiera de los "triángulos". Y el lector no encontrará dificultades para decorar los vértices con exactamente tres colores.

¿Qué podemos decir de $\chi(G)$ en un grafo G general? Lo primero, que si G tiene aristas, $\chi(G)$ está siempre comprendido entre 2 y el número de vértices del grafo:

- Por un lado, $\chi(G) \leq |V(G)|$ para todo grafo G, porque una coloración que siempre es válida (aunque, desde luego, poco efectiva) es asignar a cada vértice un color distinto.
- Por otro, si el grafo contiene al menos una arista, entonces necesitaremos dos colores como mínimo. Es decir, si $|A(G)| \geq 1$, entonces $\chi(G) \geq 2$. (De hecho, $\chi(G) = 1$ si y sólo si G no tiene aristas —es decir, si G es un grafo vacío—.)

No gran cosa, desde luego, si por ejemplo estamos tratando un grafo con 1000 vértices. Más adelante, véanse las proposiciones 11.18 y 11.19, obtendremos nuevas cotas para el número cromático en función de los grados de los vértices.

Obsérvese que si G' es un subgrafo de G, cualquier coloración de los vértices de G sirve también como coloración de los de G', porque en G' hay, en principio, menos restricciones. Así que si podemos colorear los vértices de G con, digamos, 10 colores, este número de colores bastará para colorear los vértices de G'. Lo que supone que

- si un grafo G contiene a G' como *subgrafo*, entonces $\chi(G) \geq \chi(G')$,

Esta observación sugiere un procedimiento para *acotar* (inferiormente) el valor de $\chi(G)$: buscar subgrafos en G cuyos números cromáticos se conozcan (o se sepan a su vez estimar). Lo que resultará útil porque pronto obtendremos números cromáticos de grafos como los completos, los ciclos de orden impar, etc.

[30] En *Good Will Hunting*, el título original de la película dirigida por Gus van Sant en 1997, un huérfano (interpretado por Matt Damon) con problemas psicológicos demuestra tener un talento natural para las Matemáticas, talento que es descubierto por un profesor del Massachusetts Institute of Technology, especialista en Combinatoria y Teoría de grafos. Protagonizada también por Robin Williams, Ben Affleck y Minnie Driver (Damon y Affleck son los autores del guión, ganador de un Oscar), es, ciertamente, una película recomendable.

Otra observación útil a la hora de calcular números cromáticos es que podemos restringirnos al caso de los grafos conexos. La razón es que, como no hay aristas que conecten vértices de componentes conexas distintas, las coloraciones de las distintas componentes conexas de un grafo son independientes. Más concretamente,

- si G tiene k *componentes conexas*, $G_1, G_2, \ldots, G_k$, cuyos números cromáticos son los números $\chi(G_1), \chi(G_2), \ldots, \chi(G_k)$ respectivamente, entonces

$$\chi(G) = \max_{1\le i\le k} \{\chi(G_i)\}$$

Comprobemos primero que $\chi(G) \geq \max_{1\le i\le k} \{\chi(G_i)\}$: ¿cuántos colores necesitaremos para colorear todo el grafo G? Al menos, tantos como necesitemos para colorear la componente conexa de mayor número cromático. En el otro sentido: supongamos que tenemos evaluado $\max_{1\le i\le k} \{\chi(G_i)\}$. Con este número de colores podremos colorear la componente conexa más "difícil". Pero también las otras, que necesitan menos colores.

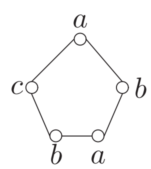
Algunas familias de grafos y sus números cromáticos

Vamos ahora a entretenernos con el cálculo de los números cromáticos para los grafos más habituales. La verificación de que un cierto número de colores es número cromático siempre supone dos pasos. Primero, se comprueba que es posible colorear con ese número de colores, para después argumentar que no se puede hacer con menos colores.

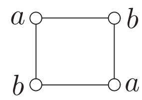
El *grafo vacío* con n vértices N_n es, como ya hemos comentado, bastante especial, pues se puede colorear con un único color: $\chi(N_n) = 1$. Y recíprocamente: si un grafo se puede colorear con un sólo color, entonces es un grafo vacío.

Pasemos a un caso más interesante, el *grafo completo* con $n \geq 1$ vértices, K_n. Aquí necesitamos tantos colores como vértices (porque, como están presentes todas las aristas posibles, cuando asignamos un color a un vértice ya no podemos utilizar este color de nuevo). Así que $\chi(K_n) \geq n$. Pero el número cromático de un grafo no puede ser mayor que el número de vértices, así que $\chi(K_n) \leq n$. De donde deducimos, finalmente, que $\chi(K_n) = n$. Esto nos dice, de paso, que si un grafo G contiene a un K_n como subgrafo, entonces $\chi(G) \geq n$. En el grafo de Will Hunting, recordemos, la presencia de triángulos (grafos completos K_3) nos permitía decidir que al menos tres colores eran necesarios.

El caso del *grafo lineal* con n vértices L_n ($n \geq 2$) es también muy sencillo: por un lado, se puede colorear con dos colores, como se muestra en la figura. Pero además, como hay al menos una arista, $\chi(L_n) \geq 2$. Por tanto, $\chi(L_n) = 2$ si $n \geq 2$.



Consideremos ahora el *grafo circular* C_n, con $n \geq 3$. Resulta conveniente distinguir entre que n sea par o impar. Ilustremos el caso impar con $n = 5$ (el caso $n = 3$ ya lo hemos visto en los grafos completos). Por un lado, podemos colorearlo con tres colores (véase el dibujo de la derecha). Y con dos colores no se puede, ¡simplemente porque la secuencia $a - b - a - b - a$ no cuadra bien! (obsérvese que empezamos y acabamos con a). Extienda el lector el argumento para deducir que $\chi(C_n) = 3$ si n es impar.



El caso par, más sencillo, lo ilustraremos con el "cuadrado", C_4. Véase, en el dibujo de la derecha, una coloración con dos colores. Pero como éste es el valor mínimo que puede tener el número cromático (pues hay aristas), $\chi(C_4) = 2$. Un argumento análogo prueba que $\chi(C_n) = 2$ si n es par.

En el *grafo bipartito completo* $K_{r,s}$, con $r, s \geq 1$, por haber aristas, $\chi(K_{r,s}) \geq 2$. Pero asignar un color a los vértices "de la izquierda" y otro distinto a los "de la derecha" es una buena coloración, así que $\chi(K_{r,s}) \leq 2$. Por tanto, $\chi(K_{r,s}) = 2$.

En realidad, todo grafo bipartito (no necesariamente completo) se puede colorear con sólo dos colores. De hecho, esta propiedad caracteriza a los grafos bipartitos (véanse los ejercicios 11.3.2 y 11.3.3). Por ejemplo, el *grafo del cubo* Q_n, para $n \geq 2$, es bipartito (recordemos la discusión del final de la subsección 10.1.3) y por tanto $\chi(Q_n) = 2$. También *los árboles y los bosques* tienen número cromático 2, salvo el caso trivial del árbol con un único vértice.

Pero, a diferencia de lo que parecen sugerir estos ejemplos sencillos, calcular el número cromático de un grafo arbitrario es una tarea extraordinariamente complicada (en términos técnicos, un problema NP-completo).

11.3.2. Algoritmo austero de coloreado

Buscamos ya un procedimiento general que permita colorear un grafo $G = (V, A)$ con $|V| = n$, dada una paleta de colores S. En principio, no limitaremos el número de colores que están a nuestra disposición, y además, para fijar el procedimiento, supondremos que la paleta está ordenada: $S = (a, b, \dots)$. El objetivo es que, en la medida de lo posible, el número de colores utilizado sea pequeño. El procedimiento, que llamaremos[31] **algoritmo austero**, consta de los siguientes pasos:

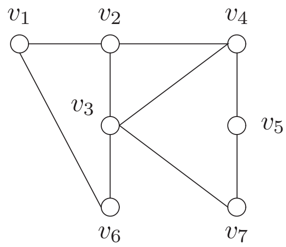
→ **Paso inicial de ordenación**. Ordenamos los vértices del grafo (¡importante!, el resultado del algoritmo dependerá de la ordenación elegida; veremos criterios para conseguir ordenaciones eficientes). Esto es, disponemos los vértices del grafo en una lista $(v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Ahora asignaremos sucesivamente colores a los vértices siguiendo la ordenación elegida.

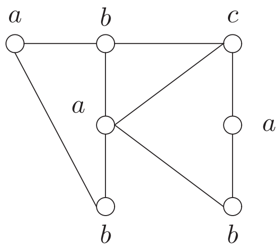
→ **Pasos de asignación de colores**

- *Primer paso*: a v_1 le asignamos el primer color disponible, a.
- *Segundo paso*: ¿cómo coloreamos v_2? Si es vecino de v_1 le asignamos el color b; si no lo es, le asignamos a.
- *Tercer paso*: para colorear v_3, comprobamos si es vecino de v_1 ó v_2; y no podremos utilizar el color o colores que hayamos utilizado en los que sean vecinos suyos.
- *k-ésimo paso*: ya hemos coloreado los vértices $(v_1, \dots, v_{k-1})$. De la paleta de colores obviamos los colores usados en los **vecinos** de v_k **que ya hayan sido coloreados**; de los colores que quedan, elegimos para v_k el primero disponible.

[31]En la bibliografía anglosajona se denomina **greedy algorithm**, que se podría traducir por algoritmo voraz, acaparador, avaricioso... (en francés se usa **glouton**, que suponemos no necesita traducción. Medite el lector sobre las diferencias culturales). El término elegido aquí (austero) trata de captar la filosofía del algoritmo, que supone elegir, en cada paso, la opción más económica, hasta conseguir la coloración completa.



Para ver el algoritmo en acción, consideremos el grafo dibujado a la derecha, en el que ya hemos asignado un cierto orden a los vértices. En el primer paso, a v_1 le asignamos el color a. Para colorear v_2 no podemos utilizar el color a, pues es vecino de v_1 (que ya ha sido previamente coloreado con a). Así que de la paleta tachamos a, $(\cancel{a}, b, c, d, \dots)$ y nos quedamos con el color b. El vértice v_3 sólo tiene un vecino que ya haya sido coloreado, el v_2 con b: $(a, \cancel{b}, c, d, \dots)$, y escogemos a.



El procedimiento se repite con los demás vértices. Para v_4 hay disponibles $(\cancel{a}, \cancel{b}, c, d, \dots)$, así que escogemos c. Para v_5 hay disponibles $(a, b, \cancel{c}, d, \dots)$, de manera que escogemos a. Para v_6 hay disponibles $(\cancel{a}, b, c, d, \dots)$, por lo que escogemos b. Llegados al vértice v_7, nos encontramos con $(\cancel{a}, b, c, d, \dots)$, de forma que escogemos b. Exhibimos, a la izquierda de estas líneas, la coloración obtenida. Observemos que el algoritmo austero ha producido una coloración con tres colores, que es el mínimo posible, esto es, el número cromático, pues el grafo contiene ciclos de longitud impar.

Nuestro "algoritmo austero" toma como datos de entrada un grafo G y una paleta de colores y produce una coloración de (los vértices de) G. Pero, ¿es realmente eficaz? ¿Permite, por ejemplo, colorear G con el mínimo número de colores posible, $\chi(G)$?

Resulta que sí. ¡Magnífico!, exclamará el lector. Pero quizás perderá parte de este entusiasmo cuando analice el argumento que exhibimos a continuación.

Supongamos que un grafo G tiene número cromático $\chi(G) = k$. Esto es, que puede ser coloreado con exactamente k colores. En otras palabras, que sus vértices pueden dividirse en k bloques (los que van "de rojo", los que van "de azul", etc.) de manera que no haya aristas entre vértices que estén en el mismo bloque. Ordene ahora el lector los vértices del grafo de la siguiente manera: primero, los del primer bloque (los "de rojo"), etiquetados del 1 hasta el número de vértices que haya en el bloque (dentro de él, da igual cómo los ponga). Luego los del segundo, luego los del tercero, etc. Al aplicar el algoritmo austero a *esta* ordenación, comprobará que se utilizan exactamente k colores.

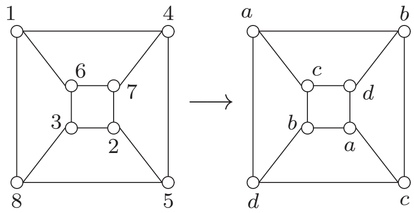
Así que una óptima ordenación. . . *haberla hayla*, pero no hay manera de saber cuál es. Obsérvese que, en el argumento anterior, la ordenación óptima viene dictada por una coloración óptima, que es justo lo que pretendemos obtener con el algoritmo. Pura prestidigitación, el argumento.

En realidad sí que hay un procedimiento para obtener la ordenación óptima (o una de ellas), que consiste en considerar cada una de las posibles y aplicar una y otra vez el algoritmo austero, hasta encontrar la fetén. Pero si el grafo tiene n vértices, hay $n!$ posibles ordenaciones y, a estas alturas, ya sabemos que. . .

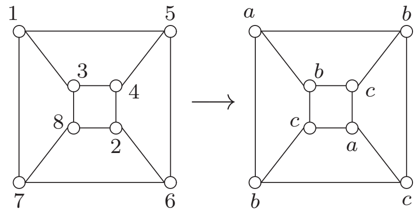
Pero no todo está perdido. En muchas ocasiones, el algoritmo funciona "bastante" bien, sobre todo si ordenamos los vértices atendiendo a unos criterios razonables. Empecemos analizando un par de ejemplos que nos permitirán entender algo más el funcionamiento de este algoritmo.

EJEMPLO 11.3.2 *Consideremos el grafo del cubo Q_3.*

Encontramos ordenaciones que utilizan:

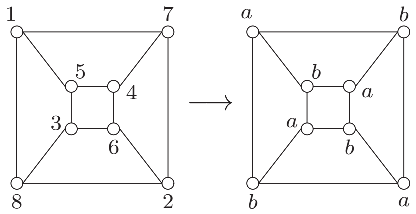


4 colores



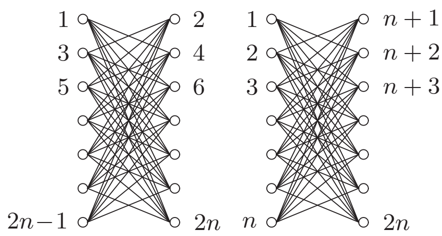
3 colores

Pero, con cierto cuidado, encontramos ordenaciones que utilizan 2 colores, el mínimo posible:



♣

EJEMPLO 11.3.3 *Consideremos un grafo bipartito con $2n$ vértices en el que cada vértice de la izquierda está unido a todos los de la derecha excepto al que se sitúa justo enfrente.*



A la derecha exhibimos dos posibles ordenaciones de los vértices. Para la primera ordenación (impares para los vértices de la izquierda, pares para los de la derecha), el algoritmo austero utiliza n colores, como el lector puede comprobar sin esfuerzo. Para la segunda ordenación, sin embargo, el algoritmo sólo emplea dos colores, que es el mejor resultado posible, pues el número cromático del grafo es 2. Si tomamos n muy grande, nos hacemos una idea de lo "sensible" que es el resultado del algoritmo austero a la ordenación inicial. ♣

En ambos ejemplos hemos encontrado ordenaciones "óptimas" (para las que el algoritmo austero emplea el mínimo número de colores posible, el número cromático). Pero además, y esto es curioso, en el caso del cubo, la "peor" ordenación posible emplea 4 colores (y 3 es el grado de los vértices), mientras que para el bipartito el peor caso utiliza n colores (y todos los vértices son de grado $n-1$). Vale la pena analizar si éste es un comportamiento general, pero antes convenzámonos de que lo dicho sobre el grafo del cubo es realmente cierto.

EJEMPLO 11.3.4 *Mostremos que, para cualquier ordenación de los vértices del cubo, el algoritmo austero utiliza, a lo sumo, 4 colores.*

En el paso k-ésimo del algoritmo, para colorear v_k estarán prohibidos los colores usados en los vértices que sean vecinos de v_k y que, **además**, sean anteriores a v_k (que sean del tipo v_j, con $j < k$). Por tanto, en cada paso habrá (como mucho) tantos colores prohibidos como el grado del vértice correspondiente. En el cubo, todos los vértices tienen grado 3, así que a lo sumo tendremos 3 colores prohibidos en cada paso. Por tanto, con 4 bastará para colorear mediante el algoritmo. ♣

El argumento descrito en el ejemplo anterior se puede generalizar, como hacemos en el siguiente resultado (cuya demostración dejamos como ejercicio al lector), que nos proporciona, de paso, una cota superior para el número cromático de un grafo.

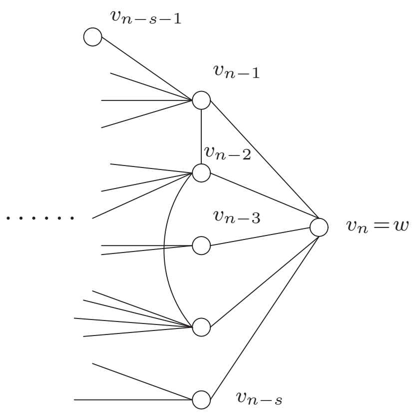
Proposición 11.18 *Sea G un grafo y sea $\Delta(G)$ su máximo grado (todos los vértices de G son de grado $\leq \Delta(G)$). Entonces el algoritmo austero utiliza a lo sumo $\Delta(G)+1$ colores. Así que*

$$\chi(G) \leq \Delta(G)+1\,.$$

Esta cota podría no ser muy buena: por ejemplo, en el grafo bipartito del ejemplo 11.3.3, para el que $\Delta(G)=n-1$. En ciertos casos, podemos mejorar un poco la estimación:

Proposición 11.19 *Si G es un grafo conexo con máximo grado $\Delta(G)$, pero en el que existe al menos un vértice w con $gr(w) < \Delta(G)$, entonces*

$$\chi(G) \leq \Delta(G)\,.$$



Demostración. Supongamos que tenemos n vértices y digamos que w tiene grado $s < \Delta(G)$. Vamos a ordenar los vértices de la siguiente manera: w será el último vértice de la lista ($w = v_n$). Los s vecinos de w precederán a éste en el orden establecido $(v_{n-1}, \dots, v_{n-s})$. Después, consideramos los vecinos de v_{n-1} que no hayan sido ya ordenados, luego los de v_{n-2} y así sucesivamente. Como G es conexo, al final tendremos una ordenación de todos los vértices. Apliquemos ahora el algoritmo austero: en cada paso estarán prohibidos los colores usados en los vecinos anteriores. Pero todos los vértices (excepto w) tienen algún vecino posterior, así que $\#\{\text{vecinos anteriores}\} \leq \Delta(G)-1$, para todo $v \neq w$. Para w, es el grado el que es estrictamente menor que $\Delta(G)$. En total, en cada paso hay, a lo sumo, $\Delta(G)-1$ colores prohibidos. Por tanto, con $\Delta(G)$ colores bastará para colorear[32]. ■

Reflexionemos un momento sobre el funcionamiento del algoritmo: en el paso k, el número de colores prohibidos es el número de colores utilizados en los vértices vecinos y anteriores:

$$\#\,\{\text{colores prohibidos para } v_k\} \leq \text{mín}\,\big\{\#\,\text{vecinos de } v_k\,,\ \#\text{anteriores}\big\} = \text{mín}\,\big\{\text{gr}(v_k), k-1\big\}.$$

Si pretendemos que el algoritmo austero utilice “pocos” colores, convendrá que esta cantidad, el número de colores prohibidos, se mantenga “pequeña” en cada paso. Así que interesará colocar los vértices de mayor grado al principio (cuando el número de vértices anteriores es pequeño, de manera que se “neutralicen” los valores grandes de los grados) y al final los de menor grado, para compensar que el número de vértices anteriores es aquí elevado (véase el ejercicio 11.3.8). Este criterio no es una panacea, e incluso en ocasiones no tiene aplicación alguna (pensemos, por ejemplo, en un grafo regular como el del cubo, donde todos los vértices tienen el mismo grado).

[32] En realidad, este resultado es más general: el **teorema de Brooks**, del que no daremos demostración, afirma que si G es un grafo conexo, entonces $\chi(G) \leq \Delta(G)$. *Excepto* si el grafo es un grafo completo o un grafo circular con un número impar de vértices, para los que $\chi(G) = \Delta(G)+1$.

11.3.3. Polinomio cromático

No sólo interesa saber si se puede colorear un grafo con k colores, sino también de cuántas formas se puede colorear. La primera cuestión queda resuelta en cuanto se conoce el número cromático, $\chi(G)$: si $k \geq \chi(G)$ podremos colorear el grafo con k colores, y si $k < \chi(G)$, será imposible colorear el grafo con k colores. Dedicamos esta subsección a la segunda cuestión.

Aquí, como queremos contar y calcular, conviene que los colores sean números, y qué mejor que los números de 1 a k. Dado un grafo G y para cada entero $k \geq 1$, llamamos

$$P_G(k) = \#\{\text{coloraciones distintas de } G \text{ usando los colores de la colección } \{1,\dots,k\}\},$$

teniendo en cuenta que *no es necesario* usarlos todos. Desde luego, P_G es una función de k, y veremos enseguida (en la subsección 11.3.5) que resulta ser un polinomio en k, que llamaremos el **polinomio cromático** de G:

$$P_G(k) = \sum_j \alpha_j\, k^j\,.$$

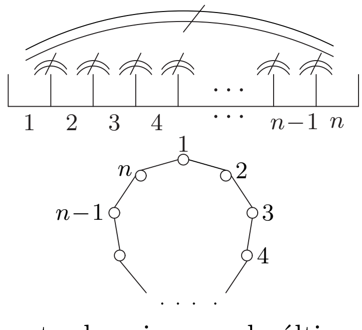
Los coeficientes (α_j), como asimismo veremos en la subsección 11.3.5, contienen información importante sobre la estructura del grafo.

Observemos, para empezar, que como un isomorfismo entre grafos traslada coloraciones de uno en coloraciones del otro, los polinomios cromáticos deben coincidir: es decir, si G y G' son dos grafos isomorfos, entonces $P_G(k) = P_{G'}(k)$, para cada entero $k \geq 1$.

Puesto que, como hemos indicado, podemos tratar listas con restricciones usando el lenguaje de grafos coloreados, el polinomio cromático nos permitirá *contar* listas con restricciones. Así, si hemos formado un grafo G con n vértices y con aristas que codifican las restricciones, $P_G(k)$ nos informa del número de listas

- de longitud n con repetición permitida con los símbolos $\{1,\dots,k\}$;
- y tales que si $\{i,j\} \in A(G)$, en las posiciones i y j de la lista usamos símbolos distintos.

El lenguaje de los polinomios cromáticos resulta ser una manera adecuada de organizar cálculos con el principio de inclusión/exclusión que hasta ahora empleábamos para abordar esta cuestión. Supongamos, por ejemplo, que queremos contar el número de n-listas con k símbolos que cumplen las restricciones que representamos simbólicamente a la derecha (distintos símbolos en las posiciones primera y segunda, en la segunda y tercera, etc., y así hasta las dos últimas posiciones; además, la primera y última posiciones deben llevar símbolos distintos). Dibujamos también el grafo correspondiente, que resulta ser un grafo circular C_n. Es la presencia de la restricción entre la primera y la última posición la que no nos permite contar las listas directamente, utilizando la regla del producto. Podríamos entonces aplicar el principio de inclusión/exclusión, calculando los tamaños de los conjuntos de n-listas en las que va el *mismo* símbolo en las dos primeras, el mismo en la segunda y tercera, etc., además de las intersecciones dos a dos, tres a tres, etc., para luego contabilizar estos números de la manera habitual.



Pero, con ayuda del lenguaje y los algoritmos que vamos a presentar, descubriremos que la respuesta que buscamos, que no es otra que $P_{C_n}(k)$, el valor del polinomio cromático de C_n en k, viene dada por la siguiente sencilla fórmula (véase el ejemplo 11.3.13):

$$P_{C_n}(k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)\,.$$

A. Polinomio cromático y número cromático

El polinomio cromático se pregunta cuántas coloraciones, y el número cromático si hay alguna, así que cuál es el número cromático debe de quedar recogido dentro del propio polinomio cromático. En efecto,

1. con menos de $\chi(G)$ colores no podemos colorear el grafo, así que $P_G(k) = 0$ si $k < \chi(G)$;
2. pero con exactamente $\chi(G)$ colores se puede colorear el grafo de, al menos, una forma; por tanto, $P_G(\chi(G)) \geq 1$.
3. De un cierto grafo G ya conocemos $P_G(k)$, el número de coloraciones distintas con k colores. Supongamos que ahora en nuestra paleta de colores disponemos de algunos más, digamos $k' > k$. ¿Cuántas coloraciones podremos formar con esos k' colores? Lo que es seguro es que las que ya teníamos con k colores seguimos teniéndolas ahora; y seguramente algunas más. Por tanto,

$$\text{si } k < k', \text{ entonces } P_G(k) \leq P_G(k').$$

Reuniendo las tres propiedades anteriores, deducimos que

$$\begin{cases} \text{si } k \geq \chi(G) \Longrightarrow P_G(k) \geq 1\,, \\ \text{si } k < \chi(G) \Longrightarrow P_G(k) = 0\,. \end{cases}$$

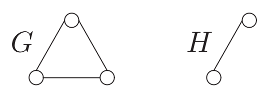
Así que si tuviéramos la expresión del polinomio cromático, podríamos obtener el valor del número cromático como *el menor valor entero* de k en el que $P_G(k)$ no se anula.

B. Subgrafos y polinomios cromáticos

Supongamos que H es un *subgrafo abarcador* de un grafo G; esto es, H tiene los mismos vértices que G y algunas de sus aristas (o quizás todas). Disponemos, además, de k colores. Toda coloración de G con esos k colores induce una coloración de H, pues si dos vértices de H son vecinos en H, también lo son en G. De manera que, para cada $k \geq 1$,

$$P_G(k) \leq P_H(k) \qquad \text{si } H \text{ es subgrafo abarcador de } G.$$

Pero, ¡atención!: la condición de ser subgrafo *abarcador* es imprescindible. Considere el lector los dos grafos G y H que aparecen a la derecha (completos con tres y dos vértices, respectivamente). Desde luego, H es subgrafo (pero no abarcador) de G. Sus respectivos polinomios cromáticos son



$$P_G(k) = k(k-1)(k-2) \qquad \text{y} \qquad P_H(k) = k(k-1)\,.$$

Así que, si k es suficientemente grande, $P_G(k) > P_H(k)$. Y es que, aunque sigue siendo cierto que toda coloración de G induce una en H, ahora puede haber muchas coloraciones de G que dan lugar a la misma en H.

Nótese que si un grafo G tiene n vértices, entonces G es subgrafo abarcador de un K_n. Además, un N_n es subgrafo abarcador de G. Pronto comprobaremos (véanse los ejemplos 11.3.8 y 11.3.9) que los polinomios respectivos de un K_n y de un N_n son:

$$P_{K_n}(k) = k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1) \quad \text{y} \quad P_{N_n}(k) = k^n\,.$$

De donde deducimos que, si G tiene n vértices, su polinomio cromático cumple que

$$k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1) \le P_G(k) \le k^n \qquad \text{para cualquier } k \ge 1.$$

C. Conexión, "desconexión" y polinomios cromáticos

Como no hay aristas entre vértices de distintas componentes conexas, las coloraciones de las distintas componentes de un grafo son independientes. Esto permite obtener, como detallaremos a continuación, el polinomio cromático de un grafo a partir de los polinomios cromáticos de sus componentes. Asimismo comprobaremos que si un grafo se puede separar en dos subgrafos que tienen "escasa conexión" entre sí (un concepto que precisaremos), el polinomio cromático del grafo se puede escribir en términos de los de estos subgrafos.

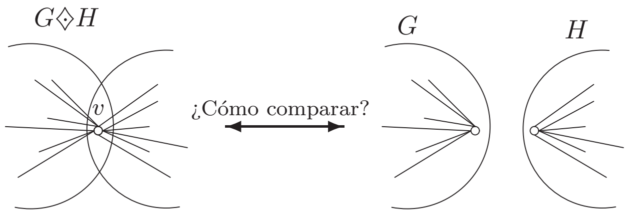
Para empezar, si G tiene dos *componentes conexas*, G_1 y G_2. Como no hay aristas entre vértices de las componentes G_1 y G_2, para construir las coloraciones de G basta construir las de G_1 primero y luego las de G_2. Aplicando la regla del producto, tendremos que

$$P_G(k) = P_{G_1}(k)\cdot P_{G_2}(k)\,.$$

La extensión a varias componentes conexas es directa: si G tiene r componentes conexas, digamos $G_1,\dots,G_r$,

$$\boxed{P_G(k) = P_{G_1}(k)\cdots P_{G_r}(k)}$$

¿Y qué ocurre si dos grafos comparten *únicamente* un vértice? Denotemos $G\diamondsuit H$ al grafo formado por dos grafos G y H que comparten sólo un vértice v. Nos gustaría escribir el valor del polinomio cromático del grafo $G\diamondsuit H$ en función de los polinomios de G y de H.



La observación clave es la siguiente: consideremos un grafo F, un conjunto de colores $\{1,\dots,k\}$ y un cierto vértice v del grafo. Entonces,

$$\#\,\{\text{coloraciones de } F \text{ con } \{1,\dots,k\} \text{ en las que } v \text{ recibe el color } 1\} = \frac{P_F(k)}{k}\,.$$

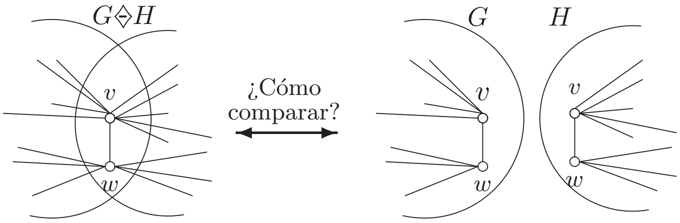
Obtendríamos el mismo resultado, por supuesto, si contáramos las coloraciones en las que v recibe el color 2, o el 3, etc.

Volvamos a la cuestión que describimos simbólicamente en el dibujo de más arriba. Supongamos que tenemos fijos los k colores, digamos $\{a_1,\dots,a_k\}$. Podemos hacer una partición de las coloraciones de uno de los grafos, por ejemplo H, en función del color que la coloración asigne al vértice v y escribir que

$$
\begin{aligned}
\#\left\{\begin{matrix}\text{Coloraciones de } H\\ \text{con } k \text{ colores}\end{matrix}\right\} &= \#\left\{\begin{matrix}\text{Coloraciones de } H \text{ con } k \text{ colores}\\ \text{que asignan } a_1 \text{ a } v\end{matrix}\right\} + \cdots \\
+ \cdots + \#&\left\{\begin{matrix}\text{Coloraciones de } H \text{ con } k \text{ colores}\\ \text{que asignan } a_{k-1} \text{ a } v\end{matrix}\right\} + \#\left\{\begin{matrix}\text{Coloraciones de } H \text{ con } k \text{ colores}\\ \text{que asignan } a_k \text{ a } v\end{matrix}\right\}
\end{aligned}
$$

El número de la izquierda es $P_H(k)$; y todos los sumandos de la derecha tienen el mismo valor, $P_H(k)/k$, como hemos indicado más arriba. Sea ahora una coloración de G, que asignará un cierto color a_j al vértice v. Queremos contar las coloraciones de H que son válidas para colorear el grafo total; es decir, aquéllas que también asignan a_j a v. Pero de ésas hay $P_H(k)/k$. Y esto ocurre sea cual sea a_j, es decir, sea cual sea la coloración de G de la que hayamos partido. Así que:

$$
\boxed{P_{G \diamondplus H}(k) = \frac{P_G(k)\, P_H(k)}{k}}
$$



Añadamos algo más de estructura común, y supongamos que los dos grafos comparten *únicamente* una arista (y, por supuesto, los vértices que son extremos de esa arista)? Es decir, consideremos un grafo $G \diamondplus H$ formado por los grafos G y H que comparten exactamente una arista, por ejemplo, la arista (v, w), como el dibujo de la izquierda.

La observación pertinente es ahora que si tenemos un grafo F, unos colores $\{1, \dots, k\}$ y consideramos una arista (v, w) del grafo, entonces

$$
\#\left\{\begin{matrix}\text{coloraciones de } F \text{ con } \{1,\dots,k\} \text{ en las que } v\\ \text{recibe el color 1 y } w \text{ recibe el color 2}\end{matrix}\right\} = \frac{P_F(k)}{k\,(k-1)}\,.
$$

De nuevo, en lugar de 1 y 2, podríamos haber elegido cualquier otro par de colores.

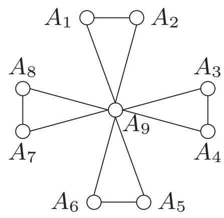
Consideremos entonces una coloración cualquiera de H, que asignará ciertos colores (¡distintos!) a_i a v y a_j a w. Queremos utilizar esta coloración para construir la del grafo grande. Podemos hacer una partición de las $P_G(k)$ posibles coloraciones de G según la pareja de colores que asignen a v y w; y de ellas, fijada la coloración de H descrita anteriormente, sólo valdrán para colorear el grafo total aquéllas que asignen los colores a_i y a_j a los vértices v y w; es decir, una proporción $1/k(k-1)$. Así que

$$
\boxed{P_{G \diamondplus H}(k) = \frac{P_G(k)\, P_H(k)}{k\,(k-1)}}
$$

Este argumento se puede generalizar, véase el ejercicio 11.3.20. Como ilustración de estas técnicas, veamos un par de ejemplos:

EJEMPLO 11.3.5 *Volvemos a la cuestión del ejemplo* 11.3.1. *Ahora se trata de calcular cuántos horarios distintos se pueden confeccionar.*

Toda la información sobre las asignaturas y las incompatibilidades se recogía en el grafo "aspas de molino" que dibujamos a la derecha. Como el grafo consta de cuatro triángulos que comparten entre sí un único vértice, aplicamos reiteradamente lo visto antes para llegar a que

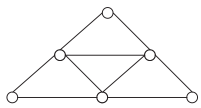


$$P_G(k) = \frac{[k(k-1)(k-2)]^4}{k^3} = k(k-1)^4(k-2)^4 \,.$$

Aunque el cálculo se puede hacer también directamente: primero, hay k posibilidades para colorear el vértice central. Una vez coloreado éste, hay $(k-1)(k-2)$ posibilidades para colorear cada par de vértices que son extremos de un aspa. En total, $k(k-1)^4(k-2)^4$. ♣

EJEMPLO 11.3.6 *El polinomio cromático del grafo de la película "El indomable Will Hunting".*

En una escena de la película (véase la nota al pie de la página 800) se calculaba, en animada e ingenua recreación del proceso de descubrimiento matemático, el polinomio cromático del grafo que aparece a la derecha. Nosotros podemos resolverlo también, observando que son cuatro triángulos que comparten tres aristas. Simulando la acción de la película, llamemos G_3 al grafo que contiene tres triángulos (por ejemplo, el que se obtiene quitando el de la esquina inferior izquierda), G_2 el que tiene dos triángulos (quitamos los dos de las esquinas inferiores) y, finalmente, G_1 al del triángulo, cuyo polinomio cromático, ya lo sabemos, es $P_{G_1}(k) = k(k-1)(k-2)$. Aplicando la regla anterior, obtenemos, sucesivamente, que



$$P_G(k) = \frac{P_{G_3}(k)\,[k(k-1)(k-2)]}{k(k-1)} = \frac{P_{G_2}(k)\,[k(k-1)(k-2)]^2}{[k(k-1)]^2} = \frac{P_{G_1}(k)\,[k(k-1)(k-2)]^3}{[k(k-1)]^3} \,.$$

Sólo queda tachar, con cierta teatralidad (tal como sucedía en la película), los factores comunes arriba y abajo para deducir que $P_G(k) = k(k-1)(k-2)^4$.

Alternativamente, podemos organizar el cálculo del polinomio cromático coloreando primero el triángulo interior, de $k(k-1)(k-2)$ maneras, para luego observar que cada vértice exterior se puede colorear de $k-2$ maneras, sea cual sea la coloración usada en el triángulo interior, dando así un total de $k(k-1)(k-2)^4$ posibles coloraciones del grafo en cuestión. ♣

D. Algunas clases de grafos y sus polinomios cromáticos

Presentamos aquí el cálculo de los polinomios cromáticos de las familias habituales de grafos. En la subsección 11.3.4 discutiremos algoritmos generales para el cálculo de $P_G(k)$.

EJEMPLO 11.3.7 *El polinomio cromático del grafo lineal L_n.*

Consideremos, para empezar, el grafo lineal con tres vértices, L_3. Con 0 o con 1 color no podemos colorearlo, así que $P_{L_3}(0) = 0$ y $P_{L_3}(1) = 0$. ¿Y para un número de colores k general? Intentemos contar las coloraciones directamente. Tendremos k posibles colores para el vértices v_1; una vez coloreado, tendremos sólo $k-1$ disponibles para v_2, porque está prohibido utilizar el color que hayamos asignado al vértice v_1. Finalmente, para v_3 también hay un color prohibido, el utilizado para v_2, así que, utilizando la regla del producto,

$$P_{L_3}(k) = k(k-1)(k-1) = k(k-1)^2 \,.$$

Un argumento análogo nos permite concluir que, para el grafo lineal con n vértices, L_n,

$$\boxed{P_{L_n}(k) = k(k-1)^{n-1}}$$

y que, por tanto, $\chi(L_n) = 2$, como ya sabíamos. ♣

Ejemplo 11.3.8 *El polinomio cromático del grafo completo K_n.*

Empecemos con el de tres vértices, K_3. No podemos colorearlo con 1 ó 2 colores, así que $P_{K_3}(1) = P_{K_3}(2) = 0$. Pero de nuevo podemos contar directamente: no hay ningún color prohibido para v_1, uno para v_2 y dos para v_3, así que

$$P_{K_3}(k) = k(k-1)(k-2) = k^3 - 3k^2 + 2k \,.$$

Y en general, si tenemos un K_n, el resultado es que

$$\boxed{P_{K_n}(k) = k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}$$

que coincide, como debe ser, con el número de n-listas sin repetición que se pueden formar con k símbolos. Como n es el primer entero en el que este polinomio no se anula, $\chi(K_n) = n$. Observe el lector que, en el polinomio cromático de K_3, $P_{K_3}(k) = k^3 - 3\,k^2 + 2\,k$, el grado del polinomio es el número de vértices y el coeficiente del segundo término es (cambiado de signo) el número de aristas. Interesante. Más sobre esto, en la subsección 11.3.5. ♣

Ejemplo 11.3.9 *El polinomio cromático del grafo vacío N_n.*

No hay aristas, así que no tenemos colores prohibidos para colorear los vértices, por lo que

$$\boxed{P_{N_n}(k) = k^n}$$

Resultado éste que ya hemos visto varias veces: son las n-listas con repetición permitida formadas con k símbolos, o el número total de aplicaciones de un conjunto con n elementos en otro con k elementos (véase también el ejercicio 11.3.13). Por cierto, de la expresión del polinomio cromático deducimos de nuevo que $\chi(N_n) = 1$. ♣

Ejemplo 11.3.10 *Polinomios cromáticos de árboles.*

Consideremos un árbol G con n vértices. Fijemos uno cualquiera de esos vértices como raíz, véase la subsección 10.2. Desde la raíz, partimos los vértices en generaciones. Como podemos usar el mismo color en toda una generación, y como cada dos generaciones podemos repetir colores, podemos usar k colores para la raíz y $k-1$ para cada uno de los vértices de la generaciones siguientes. Tenemos así que

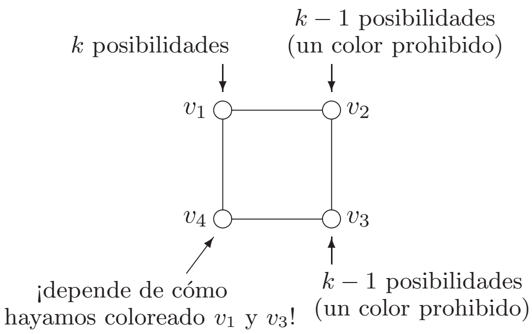
$$\boxed{P_G(k) = k(k-1)^{n-1}} \qquad \text{si } G \text{ es un árbol con } n \text{ vértices.}$$

Este ejemplo nos permite obtener una cota general para *grafos conexos*. Supongamos que G es un grafo conexo con n vértices. Sabemos ya (recuérdese la discusión de la subsección 10.2.2) que hay un subgrafo H que tiene los mismos vértices que G y que, además, es un árbol: un *árbol abarcador* de G. De la existencia de este subgrafo deducimos la siguiente cota

$$P_G(k) \leq P_H(k) = k(k-1)^{n-1}$$

(compárese con la cota general $P_G(k) \leq k^n$, que es válida para todo grafo con n vértices, conexo o no). ♣

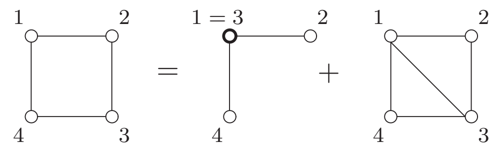
EJEMPLO 11.3.11 *El polinomio cromático del grafo circular C_n: comienzan las dificultades.*



No tanto para C_3, que coincide con K_3. Pero sí para C_4. Intentemos contar directamente el número de coloraciones, como hicimos en los otros ejemplos. El dibujo de la izquierda muestra el proceso, en el que vamos calculando las posibilidades a nuestra disposición en los sucesivos vértices. Al llegar al último vértice nos encontramos con una respuesta "depende", que no permite completar el argumento. Ya nos enfrentamos a esta cuestión en el ejemplo 2.2.7, aunque allí nos ocupaba el lenguaje de las listas con prohibiciones. Resolvimos entonces la dificultad pasando al complementario y utilizando el principio de inclusión/exclusión en su forma general; o utilizando la regla de la suma (véase el comienzo de la sección 2.3). Esta idea, convenientemente desarrollada, nos da la clave para diseñar el algoritmo que presentamos a continuación. ♣

11.3.4. El algoritmo "come-aristas"

En la sección 2.3 calculábamos el número de 4−listas que no tenían símbolos consecutivos iguales y tales que el primer y último símbolo también eran distintos. Allí considerábamos[33] dos casos: en uno, las posiciones primera y tercera llevaban el mismo símbolo, y en el otro, símbolos distintos. Y los interpretábamos, en un caso, como si una única posición englobara a la primera y a la tercera, y en el otro, como si tuviéramos una restricción adicional.

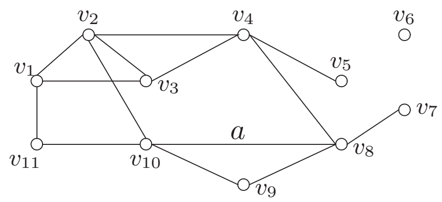


En el lenguaje de los grafos, construir las citadas listas es lo mismo que colorear un grafo C_4. Las listas en las que las posiciones 1 y 3 llevan el mismo símbolo se obtendrían coloreando un grafo lineal con tres vértices, y las listas con símbolos distintos en esas dos posiciones, coloreando un C_4 al que añadimos una de las diagonales. El dibujo de la derecha debe entenderse como una manera simbólica de expresar igualdades entre polinomios cromáticos. Significa que las coloraciones de C_4 son aquéllas en las que 1 y 3 tienen el mismo color (y, por tanto, son coloraciones del primer grafo a la derecha del signo de igualdad), y aquéllas en las que 1 y 3 llevan distinto color (y, por tanto, son coloraciones del segundo grafo a la derecha del signo de igualdad).

[33] Sutil invitación al lector a releer aquel material.

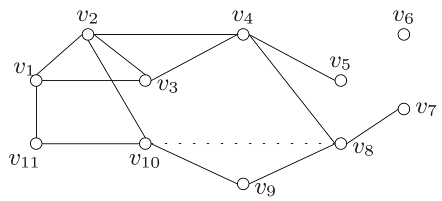
Utilicemos la misma idea para la situación general. Sea un grafo G; nos fijamos en una arista suya, $a \in A$, que señalamos en el dibujo:

G



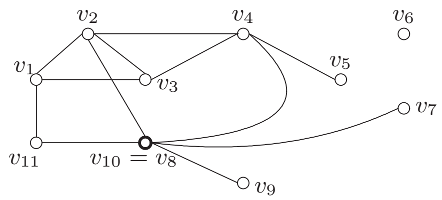
Formamos ahora el grafo $G \setminus \{a\}$ quitando esa arista:

$G \setminus \{a\}$



Por último, formamos el grafo G_a *identificando* los vértices unidos por la arista a. Si, como ocurre en el ejemplo entre v_9 y el nuevo vértice $v_8 = v_{10}$ (recuérdese que v_8 y v_{10} estaban unidos a v_9 en G), apareciera una arista doble, nos quedamos con una simple:

G_a



Fijemos k colores y supongamos que tenemos calculados $P_G(k)$, $P_{G\setminus\{a\}}(k)$ y $P_{G_a}(k)$. Consideremos las posibles coloraciones de $G \setminus \{a\}$ con esos k colores. Podemos hacer la partición:

$$\#\left\{\begin{array}{c}\text{Coloraciones}\\ \text{de } G\setminus\{a\}\\ \text{con } k \text{ colores}\end{array}\right\} = \#\left\{\begin{array}{c}\text{Coloraciones de } G\setminus\{a\} \text{ con } k\\ \text{colores que llevan colores}\\ \text{distintos en los extremos de } a\end{array}\right\} + \#\left\{\begin{array}{c}\text{Coloraciones de } G\setminus\{a\} \text{ con } k\\ \text{colores que llevan el mismo}\\ \text{color en los extremos de } a\end{array}\right\}.$$

Observemos ahora que las coloraciones de $G \setminus \{a\}$ que llevan colores distintos en los extremos de a son coloraciones válidas para G (en G tenemos una prohibición más, la que impone la arista a; pero una coloración de éstas respeta esta prohibición). Y las coloraciones de $G \setminus \{a\}$ que llevan el mismo color en los extremos de a son asimismo coloraciones válidas para G_a, donde los dos vértices son en realidad el mismo. Así que

$$\#\left\{\begin{array}{c}\text{Coloraciones de } G\setminus\{a\}\\ \text{con } k \text{ colores}\end{array}\right\} = \#\left\{\begin{array}{c}\text{Coloraciones de } G\\ \text{con } k \text{ colores}\end{array}\right\} + \#\left\{\begin{array}{c}\text{Coloraciones de } G_a\\ \text{con } k \text{ colores}\end{array}\right\}.$$

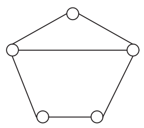
Es decir,

$$P_{G\setminus\{a\}}(k) = P_G(k) + P_{G_a}(k)\,.$$

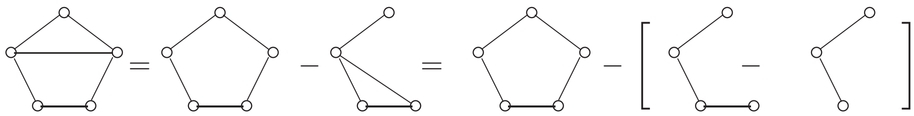
O, como resulta conveniente escribir,

$$\boxed{P_G(k) = P_{G\setminus\{a\}}(k) - P_{G_a}(k)}$$

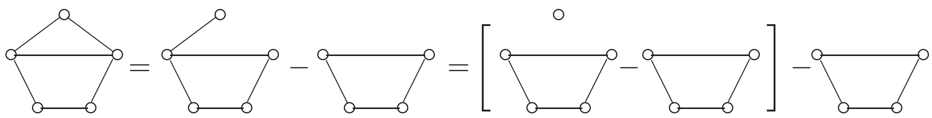
Lo que hace que esta identidad sea realmente útil (y que de hecho sea una regla de recurrencia para el cálculo de polinomios cromáticos) es que tanto G_a como $G \setminus \{a\}$ tienen una (o más) aristas *menos* que G. El proceso se puede repetir (para G_a y $G \setminus \{a\}$), a lo sumo tantas veces como aristas tiene G, hasta llegar a escribir $P_G(k)$ como suma (o resta) de polinomios cromáticos de grafos vacíos con diversos números de vértices (pues en cada paso eliminamos aristas y también vértices), que son conocidos.



En la práctica no siempre tendremos que eliminar todas las aristas, porque por el camino obtendremos grafos cuyos polinomios cromáticos conozcamos. Por ejemplo, en breve obtendremos el polinomio cromático de los grafos circulares. Si ahora consideramos el grafo que aparece a la izquierda, y con la notación simbólica explicada antes para expresar igualdades entre polinomios cromáticos, podemos optar por la siguiente aplicación del algoritmo:



con lo que $P_G(k) = P_{C_5}(k) - P_{L_4}(k) + P_{L_3}(k)$. O quizás por esta otra:

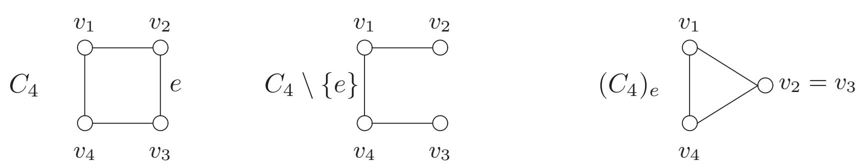


Como el polinomio cromático de un grafo con dos componentes conexas es el producto de los polinomios de cada una de ellas, concluimos que $P_G(k) = kP_{C_4}(k) - 2P_{C_4}(k)$. Aunque, en este caso, el camino más directo[34] sería aprovechar que el grafo es un triángulo y un cuadrado que comparten una arista:

$$P_G(k) = \frac{P_{C_3}(k)P_{C_4}(k)}{k(k-1)}.$$

EJEMPLO 11.3.12 *Ahora podremos calcular el polinomio cromático del grafo C_4.*

Los grafos que debemos considerar son



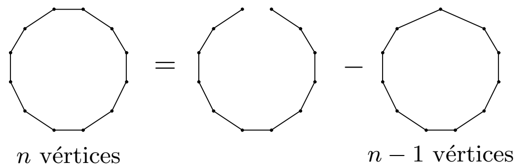
así que, siguiendo los pasos del algoritmo,

$$P_{C_4}(k) = P_{L_4}(k) - P_{C_3}(k) = k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2) = k(k-1)(k^2 - 3k + 3).$$

♣

[34]Obsérvese que el grafo de la figura está "más cerca" del grafo completo con cinco vértices que del grafo nulo con cinco vértices. Así que cabría preguntarse si no sería más conveniente transformar nuestro algoritmo de manera que, en lugar de eliminar aristas, fuéramos añadiendo. Medite el lector sobre la cuestión y revise el ejercicio 11.3.21.

EJEMPLO 11.3.13 *¿Y para un C_n general?*



En el primer paso, como se muestra a la derecha, escribimos el polinomio cromático de C_n como el de L_n (que conocemos) menos el de C_{n-1}. Pero a este último se le puede aplicar de nuevo el algoritmo, de manera que se podrá escribir como el de un L_{n-1} menos el de un C_{n-2}. Repitiendo este proceso, obtenemos

$$\begin{aligned} P_{C_n}(k) &= P_{L_n}(k) - P_{C_{n-1}}(k) = P_{L_n}(k) - \big[P_{L_{n-1}}(k) - P_{C_{n-2}}(k)\big] \\ &= P_{L_n}(k) - P_{L_{n-1}}(k) + \big[P_{L_{n-2}}(k) - P_{C_{n-3}}(k)\big] \\ &= \cdots = \sum_{j=1}^{n-3} (-1)^{j+1} P_{L_{n-j}}(k) + (-1)^{n-3} P_{C_3}(k)\,. \end{aligned}$$

Conocemos los polinomios cromáticos de los grafos lineales y del grafo C_3, así que el problema queda resuelto. Aunque el resultado no tiene, desde luego, un aspecto muy agradable.

Hay un truco, específico para este ejemplo, que nos va a llevar a una expresión más manejable. Se trata, ni más ni menos... ¡que del famoso recurso de sumar y restar un 1!:

$$\begin{aligned} P_{C_n}(k) &= P_{L_n}(k) - P_{C_{n-1}}(k) = k(k-1)^{n-1} - P_{C_{n-1}}(k) \\ &= (k-1+1)(k-1)^{n-1} - P_{C_{n-1}}(k) = (k-1)^n + (k-1)^{n-1} - P_{C_{n-1}}(k) \end{aligned}$$

Así que

$$P_{C_n}(k) - (k-1)^n = -[P_{C_{n-1}}(k) - (k-1)^{n-1}]\,.$$

La resolución de esta regla de recurrencia para el polinomio cromático del grafo circular es bien sencilla, porque basta iterarla:

$$\begin{aligned} P_{C_n}(k) - (k-1)^n &= -\big[P_{C_{n-1}}(k) - (k-1)^{n-1}\big] = (-1)^2\big[P_{C_{n-2}}(k) - (k-1)^{n-2}\big] \\ &= \cdots = (-1)^{n-3}\big[P_{C_3}(k) - (k-1)^3\big]\,. \end{aligned}$$

El polinomio cromático de C_3 es conocido, $P_{C_3}(k) = k(k-1)(k-2)$, así que

$$\begin{aligned} \boxed{P_{C_n}(k)} &= (k-1)^n + (-1)^{n-3}\big[k(k-1)(k-2) - (k-1)^3\big] \\ &= \boxed{(k-1)^n + (-1)^n(k-1)} \end{aligned}$$

Si n es par, el polinomio cromático no se anula en $k=2$, y si n es impar, sí se anula en $k=2$, pero no en $k=3$. Así que, para $n \geq 1$, $\chi(C_{2n}) = 2$, mientras que $\chi(C_{2n+1}) = 3$. ♣

Finalicemos esta discusión sobre el algoritmo de cálculo del polinomio cromático señalando que, en general, y más allá de estos ejemplos sencillos, ésta es una cuestión muy complicada desde el punto de vista computacional. Obsérvese que, en cada paso, el número de grafos que aparecen es el doble que en el paso anterior. Y, aunque son grafos cada vez más "pequeños", se plantean grandes problemas de almacenamiento y manipulación de la información que se va generando en cada etapa. Aún así, y sobre todo desde el punto de vista teórico, el polinomio cromático es un importante objeto asociado a un grafo. Al estudio de algunas de sus propiedades dedicamos la siguiente subsección.

11.3.5. Coeficientes del polinomio cromático

Como grafos isomorfos tienen polinomios cromáticos idénticos, los coeficientes del polinomio cromático deben codificar información intrínseca sobre la estructura del grafo. Conviene advertir que no tanta como para caracterizarlo, pues hay grafos no isomorfos con el mismo polinomio cromático. Por ejemplo, como ya hemos visto anteriormente, todo árbol con n vértices tiene como polinomio cromático a $k(k-1)^{n-1}$. El estudio sistemático que iniciamos ahora desvelará parte de la información que encierran los coeficientes. Pero, antes de proseguir, ya es hora de que justifiquemos que

A. ¡El polinomio cromático es un polinomio!

Para comprobar que la función $P_G(k)$, que codifica el número de formas de colorear los vértices de G con k colores es realmente un polinomio en k, basta[35] recordar el algoritmo come-aristas: al final del procedimiento, escribimos $P_G(k)$ como suma (o resta) de polinomios cromáticos de grafos vacíos N_t, para varios valores de t. Es decir, como suma (o resta) de términos del tipo $A_t\,k^t$, donde A_t es el número que da cuenta de las veces que aparece (con signos $+$ ó $-$) cada grafo vacío N_t en el resultado del algoritmo.

Sin argumentos adicionales, hemos comprobado también que los coeficientes del polinomio cromático *son siempre números enteros*. Una demostración más formal procede por inducción: supongamos que $P_G(k)$ es siempre un polinomio en k con coeficientes enteros para grafos G con $|A(G)| \leq m$. Sea H un grafo cualquiera con $m+1$ aristas. Si a es una arista de H,

$$P_H(k) = P_{H\setminus\{a\}}(k) - P_{H_a}(k)\,,$$

donde $H\setminus\{a\}$ tiene m aristas y H_a tiene, a lo sumo, m aristas. Por inducción, los dos términos de la derecha son polinomios en k con coeficientes enteros, así que su resta también lo será.

Supongamos que G tiene n vértices. Obsérvese que los grafos vacíos que se obtienen al aplicar el algoritmo come-aristas a G no pueden tener más de n vértices (los que tiene el propio G), así que el grado de $P_G(k)$ no puede ser mayor que n. Más aún, en el algoritmo aparece con seguridad un grafo vacío con n vértices (y, en realidad, sólo uno). Medite el lector sobre la cuestión hasta convencerse de que el grado de $P_G(k)$ es *exactamente* n:

$$P_G(k) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j\,k^j\,,$$

donde los números α_j son enteros. Nos interesa obtener los valores precisos de los coeficientes $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ en términos de las propiedades (número de vértices y aristas, número de componentes conexas, etc.) de que goce el grafo en cuestión.

B. Coeficientes de los términos de grado bajo

Obsérvese, para empezar, que no podemos colorear grafo alguno con 0 colores, así que el coeficiente α_0 (esto es, el término independiente) deberá ser siempre nulo:

$$\alpha_0 = P_G(0) = 0 \qquad \text{para todo grafo } G.$$

[35] Quizás el lector quiera reflexionar sobre el argumento alternativo que presentamos en el ejercicio 11.3.24.

Si G tiene dos componentes conexas, P_G será el producto de los polinomios cromáticos de sus componentes, ninguno de los cuales tiene término independiente. Así que la menor potencia de k que puede aparecer en la expresión de P_G es k^2. Esto es, el coeficiente α_1 del polinomio cromático $P_G(k)$ será nulo.

En general, si $G_1, \dots, G_r$ ($r \geq 2$) son las componentes conexas de un grafo G, entonces

$$P_G(k) = \underbrace{P_{G_1}(k) \cdot P_{G_2}(k) \cdots P_{G_r}(k)}_{\text{todos con término independiente nulo}} = \alpha_r \underbrace{k^r}_{\text{menor grado}} + \alpha_{r+1}\, k^{r+1} + \cdots,$$

y por tanto, no sólo α_0, sino también los siguientes coeficientes $(\alpha_1, \dots \alpha_{r-1})$ son nulos.

C. Suma de coeficientes

Además, si G no es un grafo vacío, es decir, si tiene alguna arista, entonces no podemos colorearlo con un único color. Esto es, $P_G(1) = 0$, lo que nos dice que la suma de los coeficientes de su polinomio cromático vale siempre 0:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = P_G(1) = 0 \qquad \text{si } G \text{ no es un grafo vacío.}$$

D. Coeficientes de los términos de grado alto y alternancia de signos

Como el lector concienzudo podrá comprobar, en todos los ejemplos que hemos analizado en páginas anteriores se verifican la serie de propiedades que listamos a continuación: si el grafo tiene n vértices y m aristas y escribimos su polinomio cromático de la forma $\sum_j \alpha_j k^j$, entonces:

(1) el coeficiente α_n (el del término de mayor grado) es siempre 1;

(2) el coeficiente α_{n-1} (el del término en k^{n-1}) coincide con $-m$;

(3) si G tiene $r \geq 1$ componentes conexas, *todos* los coeficientes, desde α_n hasta α_r, son *no nulos*;

(4) y estos coeficientes van alternando el signo: $\alpha_n = 1$, $\alpha_{n-1} = -m$, luego α_{n-2} es positivo, α_{n-3} es negativo, etc.

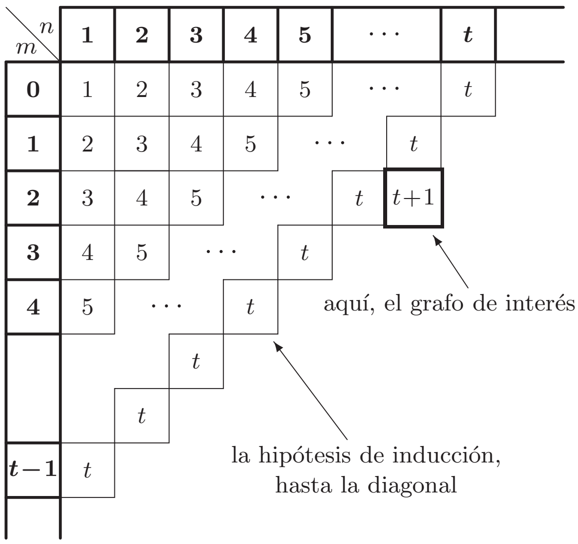
Para probar que estas propiedades se cumplen en un grafo general, vamos a combinar dos herramientas: por un lado, el algoritmo come-aristas, que nos dice que

$$P_G(k) = P_{G\setminus\{a\}}(k) - P_{G_a}(k)$$

Si G tiene n vértices y m aristas, la tabla de la derecha recoge la información que tenemos sobre los tres grafos en cuestión. Y la identidad anterior se puede reescribir, llamando β_j y γ_j a los coeficientes de $P_{G\setminus\{a\}}$ y P_{G_a}, como

grafo	vértices	aristas
G	n	m
$G \setminus \{a\}$	n	$m-1$
G_a	$n-1$	$\leq m-1$

$$(\star) \qquad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, k^j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j\, k^j - \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j\, k^j\,.$$



El otro ingrediente va a ser el método de inducción. Una inducción peculiar, sobre *la suma* $n+m$ (número de vértices más número de aristas del grafo). Quizás la tabla de la derecha ayude a entender el procedimiento. La tabla va etiquetada por n, los posibles números de vértices, y por m, los de aristas. Los registros de la tabla son los valores de $n+m$: Enunciaremos la hipótesis de inducción de la siguiente manera: la propiedad "tal" se cumple para todos los grafos para los que la suma del número de vértices y el número de aristas sea $\leq t$. Entonces, si partimos de un grafo G con n vértices y m aristas, donde $m+n=t+1$, *automáticamente* (véase la tabla) los grafos $G \setminus \{a\}$ y G_a cumplirán la hipótesis en cuestión. Además, y para empezar, habría que comprobar el caso inicial[36] $n+m=1$, algo que el lector diligente habrá cumplimentado ya al terminar esta frase.

Sin más preámbulo (que ya ha sido bastante), nos ponemos a la faena:

$\boxed{\text{Propiedad 1}}$ *El coeficiente del término de mayor grado es siempre 1.*

Sólo hay que reescribir ($\star$) y utilizar la hipótesis de inducción (para $G\setminus\{a\}$, en este caso):

$$P_G(k) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j\, k^j - \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j\, k^j = k^n + \sum_{j=1}^{n-1} (\beta_j - \gamma_j)\, k^j\,.$$

$\boxed{\text{Propiedad 2}}$ *El siguiente coeficiente coincide con el número de aristas (cambiado de signo).*

Aprovechamos la propiedad 1 y la hipótesis de inducción (sobre $G\setminus\{a\}$) para reescribir ($\star$) de la siguiente manera:

$$P_G(k) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j\, k^j - \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j\, k^j = k^n + \Big[-(m-1) - 1 \Big]\, k^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-2} (\beta_j - \gamma_j)\, k^j\,,$$

de donde obtenemos que el coeficiente del término en k^{n-1} de $P_G(k)$ es, justamente, $-m$.

Dejamos al lector que se ejercite comprobando la propiedad 3 (los coeficientes intermedios son todos no nulos) y terminamos demostrando la

$\boxed{\text{Propiedad 4}}$ *Los coeficientes alternan en signo, empezando con el de mayor grado, que es positivo (vale 1, de hecho).*

Supondremos que n es par (un argumento análogo valdría para n impar, ¡compruébese!).

[36]O quizás los casos triviales en los que $m=0$. Obsérvese que, en la tabla de la página anterior, muchas casillas no se corresponden con situaciones en las que podemos tener grafos. Por ejemplo, con $n=1$ vértices sólo podemos tener $m=0$ aristas. En general, para n vértices sólo podremos tener un número de aristas entre 0 y $\binom{n}{2}$. Acepte el lector la ligera imprecisión del argumento.

Por la hipótesis de inducción, podemos escribir $P_{G\setminus\{a\}}$ y P_{G_a} de la siguiente manera:

$$P_{G\setminus\{a\}}(k) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^j\,\widetilde{\beta}_j\,k^j \qquad \text{y} \qquad P_{G_a}(k) = \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1}\,\widetilde{\gamma}_j\,k^j\,,$$

donde todos los $\widetilde{\beta}_j$ y $\widetilde{\gamma}_j$ son *no negativos*. Ahora reescribimos $(\star)$ a la luz de esta información:

$$P_G(k) = \sum_{j=1}^{n}\beta_j\,k^j - \sum_{j=1}^{n-1}\gamma_j\,k^j = \sum_{j=1}^{n}(-1)^j\,\widetilde{\beta}_j\,k^j - \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1}\,\widetilde{\gamma}_j\,k^j = k^n + \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\,(\widetilde{\beta}_j + \widetilde{\gamma}_j)\,k^j\,,$$

que nos dice que los coeficientes de $P_G(k)$ van alternados de signo.

E. Coeficientes del polinomio cromático y principio de inclusión/exclusion

Ya disponemos de mucha información sobre los coeficientes de un polinomio cromático. Pero, insaciables en nuestra sed de conocimiento, nos gustaría saber, por ejemplo, cuánto vale el coeficiente α_{n-2}. Y aunque a estas alturas ya intuimos (aún más, estaríamos dispuestos a asegurar) que el valor de α_{n-2} tendrá que ver con alguna característica intrínseca del grafo, los ejemplos vistos no nos permiten conjeturar cuál será ese valor, por lo que no podemos utilizar la maquinaria de prueba por inducción que tan fructífera se ha mostrado hasta ahora.

Para proseguir nuestro análisis, recurrimos al principio de inclusión/exclusión, que subyace en todo lo relacionado con los polinomios cromáticos. Recordemos que colorear con k colores un grafo G de n vértices y m aristas es lo mismo que formar n-listas con k símbolos y con las restricciones (entre posiciones) que señalen las m aristas. Ya en este lenguaje de listas, llamando $\mathcal{L}$ al conjunto de las n-listas con k símbolos, empezamos por definir los conjuntos

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\text{listas de } \mathcal{L} \text{ con el mismo símbolo en las posiciones que indique la arista } 1\}\,, \\ &\vdots \\ A_m &= \{\text{listas de } \mathcal{L} \text{ con el mismo símbolo en las posiciones que indique la arista } m\}\,. \end{aligned}$$

Pasando al complementario,

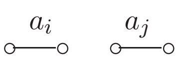
$$P_G(k) = \#\,\text{listas legales} = |\mathcal{L}| - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m|.$$

El número total de listas $|\mathcal{L}|$ es, por supuesto, k^n. Ahora, siguiendo el paradigma del principio de inclusión/exclusión, vamos a evaluar el tamaño de todas las posibles intersecciones.

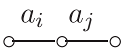
Para calcular $|A_i|$, para cada i, basta observar que dos posiciones llevan el mismo símbolo; luego tenemos libertad para elegir los símbolos de las restantes $n-2$ posiciones. Por tanto,

$$|A_i| = k \cdot k^{n-2} = k^{n-1} \qquad \text{para cada } i = 1, \ldots, m.$$

Vamos con las intersecciones dos a dos. Llamemos a_i a la arista asociada al conjunto A_i y a_j a la asociada a A_j. Sólo hay dos configuraciones posibles:



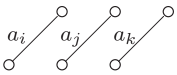
Quedan $n-4$ vértices libres y hay que elegir dos colores para los dos pares de vértices a los que llegan a_i y a_j $\to$ $|A_i \cap A_j| = k^{n-4}\,k^2 = k^{n-2}$



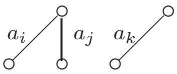
Quedan $n-3$ vértices libres y hay que elegir un color para los tres vértices a los que llegan a_i y a_j $\to |A_i \cap A_j| = k^{n-3}\,k = k^{n-2}$

En ambos casos obtenemos k^{n-2}; por tanto, $|A_i \cap A_j| = k^{n-2}$ para todo $i \neq j$.

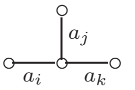
Para las intersecciones 3 a 3 (que involucran 3 aristas) hay cinco configuraciones posibles:



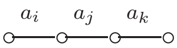
Quedan $n-6$ vértices libres y hay que elegir tres colores para los tres pares de vértices a los que llegan a_i, a_j y a_k $\to |A_i \cap A_j \cap A_k| = k^{n-6}\,k^3 = k^{n-3}$



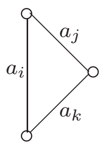
Quedan $n-5$ vértices libres y hay que elegir dos colores para los dos conjuntos de vértices a los que llegan a_i, a_j y a_k $\to |A_i \cap A_j \cap A_k| = k^{n-5}\,k^2 = k^{n-3}$



Quedan $n-4$ vértices libres y hay que elegir un color para los vértices a los que llegan a_i, a_j y a_k $\to |A_i \cap A_j \cap A_k| = k^{n-4}\,k = k^{n-3}$



Quedan $n-4$ vértices libres y hay que elegir un color para los dos vértices a los que llegan a_i, a_j y a_k $\to |A_i \cap A_j \cap A_k| = k^{n-4}\,k = k^{n-3}$



Quedan $n-3$ vértices libres y hay que elegir un color para los vértices a los que llegan a_i, a_j y a_k $\to |A_i \cap A_j \cap A_k| = k^{n-3}\,k = k^{n-2}$

La última configuración es la que menos vértices involucra y, como vemos, es especial. El polinomio cromático se escribe, con la información de que disponemos hasta ahora como

$$\begin{aligned} P_G(k) &= k^n - \left[\sum_i |A_i| - \sum_{i\neq j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i\neq j\neq k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots\right] \\ &= k^n - \left\{\binom{m}{1}k^{n-1} - \binom{m}{2}k^{n-2} + \left[\binom{m}{3} - \#\text{triángulos}\right]k^{n-3} + (\#\ \text{triángulos})\,k^{n-2} + \cdots\right\} \\ &= k^n - m\,k^{n-1} + \left[\binom{m}{2} - \#\ \text{triángulos}\right]k^{n-2} + \cdots \end{aligned}$$

Que los dos primeros coeficientes son 1 y $-m$ ya lo sabíamos. Ahora descubrimos que el siguiente coeficiente es

$$\binom{m}{2} - \#\,\text{triángulos}.$$

Un resultado sugerente: de nuevo, una cantidad ligada a propiedades estructurales del grafo.

Para concluir que esta afirmación es cierta, debemos comprobar que en el resto del polinomio cromático, "eso" que hemos representado con puntos suspensivos (y que se corresponde con configuraciones que involucran 4 o más aristas), no aparecen más términos en k^{n-2}. La inducción no parece ahora un buen camino, porque no tenemos información sobre el número de triángulos que tienen los grafos $G\setminus\{a\}$ y G_a, así que debemos argumentar de otra manera.

Recordemos que intentamos calcular $|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_l|$, donde $l \geq 4$. Cada conjunto de listas A_j está “asociado” a una arista a_j. El subgrafo H de G formado por las aristas $a_1, \ldots, a_l$ consta de un cierto número t de vértices y de un cierto número r de componentes conexas. Las listas que queremos contar se corresponden con “coloraciones” de G en las que los vértices de cada arista a_j llevan el *mismo* color. Así que “coloreamos” primero H con esta peculiar receta, pintando los vértices de cada componente conexa con el mismo color (hay k^r formas de hacerlo). Hecho esto, tenemos libertad para colorear los $n-t$ vértices restantes de G. Y así

$$|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_l| = k^{n-t}\, k^r = k^{n-t+r}\,.$$

Si ahora comprobáramos que $n-t+r \leq n-3$, o, en otras palabras, que $r \leq t-3$, habríamos concluido el argumento: los siguientes términos del polinomio no podrían contener potencias k^{n-2}. El siguiente resultado da fin a nuestras preocupaciones:

Proposición 11.20 *Sea G un grafo con r componentes conexas, t vértices y l aristas.*

(a) Si G no tiene vértices aislados, entonces $r \leq t/2$.

(b) Si G no tiene vértices aislados y además $l \geq 4$, entonces $r \leq t-3$.

Demostración. La parte (a) es sencilla, pues cada componente conexa ha de tener, como mínimo, dos vértices. Para la segunda parte,

- si $t \geq 6$, se cumple que $t/2 \leq t-3$, y la parte (a) nos permite concluir el resultado;
- si $t = 5$, queremos comprobar que $r \leq 2$. Pero es que si hubiera tres (o más) componentes conexas, tendríamos vértices aislados. Y si $t = 4$, sólo puede suceder que $r = 1$, pues recordemos que al menos hay cuatro aristas. ■

E. Coda recurrente de asombro

Paremos un momento. Recuperemos el resuello. Reflexionemos durante unos breves momentos: hemos creado un objeto abstracto, los grafos. Son objetos matemáticos que aportan un lenguaje de representación. Hemos ampliado el lenguaje introduciendo coloreados de vértices y nos hemos puesto a contar formas distintas de colorear. Las hemos codificado en otro objeto, que es un polinomio, y hemos estudiado sus coeficientes, que resulta que tienen propiedades tales como que *siempre* alternan en signo, o que el segundo coeficiente. . .

El grado de sorpresa y asombro aumenta si nos dicen que, por ejemplo, el valor del polinomio cromático en $k = -1$ tiene una interpretación combinatoria: $(-1)^{|V(G)|} P_G(-1)$ coincide con el número de orientaciones acíclicas[37] del grafo G. ¡En $k = -1$! ¿Pero k no era el número de colores con los que coloreábamos?, ¿qué sentido tiene $k = -1$?

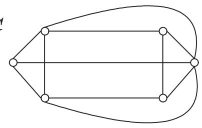
Pues todo eso, y bastante más[38], estaba en el objeto que hemos. . . ¿creado? ¿O estaba dentro, por sí sólo, por su cuenta? ¿Subyacía y lo hemos desvelado? ¿Lo hemos . . . descubierto? ¡Cuesta no ser platónico cuando habitamos el mundo virtual de los objetos matemáticos!

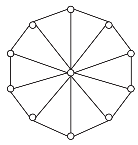
[37] Dado un grafo, podemos asignar un sentido a cada una de sus aristas (“orientarlo”), para convertirlo en un grafo dirigido. Estas orientaciones serán *acíclicas* si no contienen ciclos dirigidos. Véase el ejercicio 11.3.25.

[38] Como ciertas curiosas propiedades de los ceros de un polinomio cromático. El matemático americano George David Birkhoff (1884-1944) introdujo la noción de polinomio cromático en conexión con el problema de coloreado los mapas, y precisamente con la esperanza de que el estudio analítico de los ceros de esta función arrojara luz sobre el problema de los cuatro colores.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 11.3

11.3.1 *Compruébese que el grafo G del dibujo de la izquierda tiene número cromático 4. Considérese también el grafo R_n, $n \geq 2$, que llamaremos* ***grafo rueda*** *(dibujo de la derecha), que tiene $n+1$ vértices. Compruébese que $\chi(R_n) = 3$ si n es par, mientras que $\chi(R_n) = 4$ si n es impar.*

G


R_n


11.3.2 *Compruébese que $\chi(G) = 2$ si y sólo si G es un grafo (no vacío) bipartito.*

11.3.3 *Utilícese el algoritmo austero para comprobar que $\chi(G) = 2$ si y sólo si G no contiene ciclos de orden impar. Dedúzcase que un grafo G es bipartito si y sólo si no tiene ciclos de orden impar.*

11.3.4 *Pruébese que si G es un grafo con n vértices y tal que todos sus vértices tienen grado k entonces*

$$\chi(G) \geq \frac{n}{n-k}\,.$$

11.3.5 *Pruébese que si G es un grafo, entonces*

$$a)\quad |A(G)| \geq \binom{\chi(G)}{2}. \qquad b)\quad \chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2|A(G)| + \frac{1}{4}}\,.$$

11.3.6 *Compruébese que el número máximo de aristas que puede tener un grafo de n vértices y número cromático 2 es $n^2/4$ si n es par, y $(n-1)(n+1)/4$ si n impar.*

11.3.7 *El grafo M_r se obtiene del ciclo C_{2r} añadiendo aristas que unen pares de vértices opuestos. Es decir, si los vértices son $\{1, 2, \ldots, 2r\}$ entonces las aristas son $\{1,2\}$, $\{2,3\}, \ldots, \{2r-1, 2r\}$, $\{2r, 1\}$ y $\{1, r+1\}$, $\{2, r+2\}, \ldots,$ $\{r, 2r\}$. Pruébese que*

(i) M_r *es bipartido cuando* r *es impar.*

(ii) $\chi(M_r) = 3$ *cuando* r *es par y* $r \neq 2$.

(iii) $\chi(M_2) = 4$.

11.3.8 *Dado un grafo G, ordenemos los vértices $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de forma que si g_i = grado(v_i) entonces $g_1 \geq g_2 \geq \cdots \geq g_n$. Sea*

$$q = \max_{1 \leq i \leq n} \{\min\{i, 1 + g_i\}\}.$$

Pruébese que $\chi(G) \leq q$. Dedúzcase que si k es tal que $k - 1 \leq g_k$ y $k > g_{k+1}$, entonces $\chi(G) \leq k$.

11.3.9 *Sea $G = (V, A)$ un grafo y sea $\widetilde{G}$ su complementario (mismos vértices que G y sus aristas unen los pares de vértices que no están unidas en G).*

(i) *Pruébese que* $\chi(G)\chi(\widehat{G}) \geq n$.

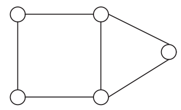
(ii) *Compruébese que* $\chi(G) + \chi(\widehat{G}) \leq n + 1\,.$

11.3.10 *Dado un grafo G, una* ***anticoloración*** *de G es una asignación de color a los vértices de G de manera que vértices vecinos en el grafo reciben el mismo color. Compruébese que*

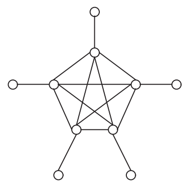
$$\#\,\{\textit{máximo de colores distintos en una anticoloración}\} = \#\{\textit{componentes conexas de } G\}\,.$$

11.3.11 *Calcúlense los números y los polinomios cromáticos de los siguientes grafos:*

G_1



G_2



11.3.12 *Sea G un grafo. Supongamos que en todo subgrafo H de G se cumple que*

$$\delta(H) \equiv \min_{v\in V(H)} gr_H(v) \le K\,,$$

($gr_H(v)$ quiere decir el grado de v como vértice de H). Compruébese que $\chi(G) \le K+1$.

11.3.13 *Sea $G = N_n$ el grafo vacío con n vértices. Llamemos $d(j)$ el número de formas de colorear N_n con j colores* usándolos todos. *Verifíquese que $d(j) = j!\,S(n,j)$ y conclúyase que*

$$k^n = \sum_{j=1}^{n} k(k-1)\dots(k-j+1)\,S(n,j)\,.$$

un resultado que ya hemos visto en varias ocasiones (revísese el ejemplo 3.3.3).

11.3.14 *(a) Pruébese que un grafo G con n vértices es un árbol si y sólo si su polinomio cromático es $p_G(k) = k\,(k-1)^{n-1}$.*

(b) Compruébese que si el grafo G de n vértices es un bosque formado por t componentes conexas (árboles), entonces su polinomio cromático es $P_G(k) = k^t(k-1)^{n-t}$. ¿Es cierto el recíproco?

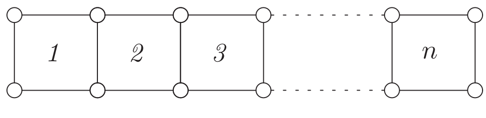
11.3.15 *Sea G un grafo con n vértices cuyo polinomio cromático P_G cumple que $P'_G(0) \neq 0$ y que $P_G^{(n-1)}(0) = (1-n)(n-1)!$. Demuéstrese que G es un árbol.*

11.3.16 *Hállese el polinomio cromático del grafo bipartito completo $K_{r,s}$, donde $r \ge 1$ y $s \ge 1$.*

11.3.17 *Compruébese que el polinomio cromático del grafo Q_3 correspondiente al cubo tridimensional viene dado por*

$$P_{Q_3}(k) = k^8 - 12\,k^7 + 66\,k^6 - 214\,k^5 + 441\,k^4 - 572\,k^3 + 423\,k^2 - 133\,k\,.$$

11.3.18 *Calcúlese el polinomio cromático del grafo E_n=(Escalera)$_n$, que tiene $2n+2$ vértices y $3n+1$ aristas:*



11.3.19 *Para cada par de números naturales n, m, ($n \ge 2$, $m \ge 2$), construimos el grafo $\mathcal{G}_{n,m}$ que tiene $n+m$ vértices $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \cup \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ con las $n+m-2$ aristas*

$$\Big\{\{a_i, a_{i+1}\}_{i=1}^{i=n-1}\,;\;\{b_j, b_{j+1}\}_{j=1}^{j=m-1}\Big\}$$

más las 4 aristas siguientes $\{\{a_1, b_1\}, \{a_1, b_2\}, \{a_2, b_1\}, \{a_2, b_2\}\}$. *Es decir, se trata de un grafo* L_n *y un grafo* L_m *que unimos mediante todas las aristas posibles entre sus respectivos dos primeros vértices. Se pide calcular el número cromático y el polinomio cromático de* $\mathcal{G}_{n,m}$.

11.3.20 *Pruébese la siguiente generalización de los resultados sobre grafos que son unión de dos que comparten un vértice o una arista: si un grafo* G *está compuesto por dos subgrafos* H_1 *y* H_2 *que comparten un grafo completo con* n *vértices, entonces*

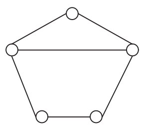
$$P_G(k) = \frac{P_{H_1}(k)\, P_{H_2}(k)}{P_{K_n}(k)}\,.$$

Los casos vistos anteriormente corresponden a $n = 1$ *y* $n = 2$. *Compruébese que la conclusión no es cierta, en general, si la intersección de los dos subgrafos no es un grafo completo.*

11.3.21 *En este ejercicio vamos a "reinterpretar" el algoritmo come-aristas. La construcción básica nos decía que*

$$P_{G\setminus\{a\}}(k) = P_G(k) + P_{G_a}(k)\,,$$

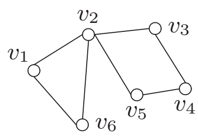
tras una adecuada reordenación de los términos. Es decir, que si tenemos un cierto grafo que, en la notación de arriba, sería $G\setminus\{a\}$, *su polinomio cromático se puede escribir como la suma del polinomio cromático del grafo que obtenemos añadiéndole a* $G \setminus \{a\}$ *una cierta arista* a *(por supuesto, una que no esté en el grafo) más el polinomio cromático del grafo que resulta de identificar los vértices de* a. *En ocasiones, este nuevo punto de vista, que podemos bautizar como el "algoritmo añade-aristas", puede ser más eficaz que el "come-aristas". Por ejemplo, cuando el grafo que estamos considerando esté "más cerca" de ser un grafo completo que uno vacío. Aplíquese esta idea a la obtención del polinomio cromático del grafo que aparece dibujado a la derecha.*



11.3.22 *¿Cuántas listas distintas (con repetición permitida) de longitud 7 se pueden formar con los cuatro símbolos* $\{a, b, c, d\}$ *de manera que en posiciones consecutivas aparezcan símbolos distintos, y que además el símbolo de la posición central sea distinto del símbolo en la posición primera y del símbolo en la posición última?*

11.3.23 *Compruébese, usando inducción y el argumento empleando para comprobar la alternancia de signo de los coeficientes, que si un grafo* G *tiene* n *vértices y* r *componentes conexas, entonces todos los coeficientes desde el término independiente hasta el de grado* $r - 1$ *son cero, mientras que todos los coeficientes desde el de grado* r *hasta el de grado* n *son no nulos.*

11.3.24 *Un* ***conjunto de vértices independientes*** *de un grafo* G *es un subconjunto de* $V(G)$ *cuyos elementos no tienen aristas entre sí. Por ejemplo,* $S = \{v_1, v_3, v_5\}$ *es un conjunto de vértices independientes del grafo que dibujamos a la derecha, mientras que* $S' = \{v_1, v_2, v_3\}$ *no lo es (pues, por ejemplo, hay una arista entre* v_1 *y* v_2*).*



Sea G *un grafo con* n *vértices, y llamemos* $f_G(r)$ *al número de formas distintas de partir los vértices de* G *en* r *conjuntos de vértices independientes. Obsérvese que* $f_G(r) = 0$ *si* $r > n$ *y también que* $f_G(0) = 0$.

a) Podemos colorear los vértices del grafo G *con* k *colores de la siguiente manera: primero partimos* $V(G)$ *en* r *conjuntos independientes, y luego asignamos a cada bloque un color distinto. Compruébese que, dada una partición en* r *bloques, tenemos* $k(k-1)\cdots(k-r+1)$ *maneras distintas de asignar colores a los vértices de cada bloque. Dedúzcase que*

$$P_G(k) = \sum_{r=1}^{n} f_G(r)\, k(k-1)\cdots(k-r+1) = f_G(1)\, k + f_G(2)\, k(k-1) + \cdots + f_G(n)\, k(k-1)\cdots(k-n+1)\,.$$

En particular, esto prueba que $P_G(k)$ es un polinomio en k, con coeficientes enteros y de grado n. Nótese que los números $f_G(r)$ son los coeficientes de $P_G(k)$ en la base de los factoriales decrecientes, que presentamos en la discusión sobre el origen de los números de Stirling de la subsección 3.3.2.

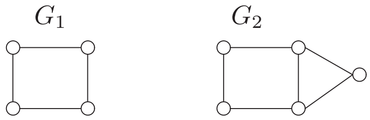
b) Compruébese que $f_G(n) = 1$ y dedúzcase que el coeficiente que acompaña a k^n en $P_G(k)$ es 1.

c) Supongamos ahora que el grafo G tiene n vértices y m aristas. Compruébese que $f_G(n-1)$ coincide con el número de pares de vértices sin arista en común, esto es, con $\binom{n}{2} - m$.

d) Si el lector revisa la citada discusión sobre números de Stirling, descubrirá que el coeficiente de k^{n-1} en el desarrollo de $k(k-1)\cdots(k-n+1)$ coincide con el número de Stirling de primera especie $s(n, n-1)$. Anímese el lector a calcularlo, si no lo hizo en su momento, para obtener la respuesta: $-\binom{n}{2}$.

e) Detéctense, en la expresión de $P_G(k)$ escrita arriba, los factores en k^{n-1} y utilícense los dos apartados anteriores para comprobar que el coeficiente que acompaña a k^{n-1} en $P_G(k)$ es $-m$.

11.3.25 *Dado un grafo G, "orientarlo" consiste en crear a partir de él un grafo dirigido asignando sentido a sus aristas. Si G tiene m aristas, hay 2^m orientaciones distintas. Una orientación es "acíclica" si el grafo dirigido no contiene ciclos.*



Considérense los dos grafos que aparecen a la derecha. El primero, G_1, es un grafo circular con 4 vértices y 4 aristas. Tiene, pues, $2^4 = 16$ orientaciones distintas. El grafo G_2, algo más complicado, tiene $2^6 = 64$ orientaciones distintas, pues consta de 6 aristas. Compruebe el lector (a mano) que 22 de ellas contienen ciclos. Ahora obténgase, en ambos casos, el número de orientaciones acíclicas calculando los respectivos polinomios cromáticos y evaluándolos en $k = -1$.

Los siguientes ejercicios están dedicados a las **coloraciones de aristas**.

11.3.26 *Una coloración de las aristas de un grafo G es una asignación de colores a las aristas del grafo de forma que las aristas adyacentes (es decir, que comparten un vértice) llevan distinto color. Llamamos $\chi'(G)$, el **número cromático de aristas**, al menor número de colores necesario para colorear las aristas de un grafo. Compruébese que $\chi'(G) \geq \Delta(G)$, donde, recordemos, $\Delta(G)$ es el mayor grado presente en los vértices del grafo*[39].

11.3.27 *Compruébese que, para los grafos circulares C_n y los completos K_n*

$$\chi'(C_n) = \begin{cases} \Delta(C_n) = 2 & \text{si } n \text{ par;} \\ \Delta(C_n) + 1 = 3 & \text{si } n \text{ impar;} \end{cases} \qquad \chi'(K_n) = \begin{cases} \Delta(K_n) = n-1 & \text{si } n \text{ par;} \\ \Delta(K_n) + 1 = n & \text{si } n \text{ impar;} \end{cases}$$

11.3.28 *Compruébese que si G es un grafo k regular con un número impar de vértices, entonces $\chi'(G) \geq k+1$ (en lugar del obvio $\chi'(G) \geq k$).*

11.3.29 *Comprúebese que si G tiene n vértices, m aristas, $\Delta(G) = k$ y se cumple que $m > k\lfloor n/2 \rfloor$, entonces $\chi'(G) = k+1$.*

11.3.30 *(a) Compruébese que el grafo de Petersen (véase el dibujo del ejercicio 11.1.7) no se puede colorear con tres colores (nótese que este grafo 3-regular tiene 10 vértices y 15 aristas, así que no podemos aplicar directamente el ejercicio anterior).*

(b) Obsérvese que si el grafo fuera hamiltoniano, entonces sus aristas se podrían colorear con tres colores. Dedúzcase que el grafo de Petersen no es hamiltoniano.

[39] Un resultado general, debido a Vizing, afirma que para un grafo G cualquiera, $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G)+1$. Los grafos bipartitos, por ejemplo, tienen $\chi'(G) = \Delta(G)$ (es un resultado de König).