

## Capítulo 6

# Ecuaciones de recurrencia

En argumentos lógicos o en algoritmos, cuando toca dilucidar o resolver una sucesión de casos, el matemático busca averiguar la estructura común y la conexión de cada caso con el anterior. La técnica es astuta: si podemos reducir la verificación de cada caso a la del anterior (con un argumento general), al final sólo quedará un primer caso por resolver, del que se deducirán todos. Ésta es la esencia del método de inducción, al que aquí nos estamos refiriendo en el sentido inductivo en el que habitualmente se encuentra en la práctica, y no en el deductivo con el que ineludiblemente se presenta su argumentación (véase la sección 1.2).

Nos interesarán cálculos como, por ejemplo, evaluar el número de estructuras combinatorias (conjuntos, quizás listas) de tamaño o longitud  $n$  con ciertas características. Cada caso, que se corresponde con cada valor de  $n$ , da lugar a un cálculo distinto. Pero en ocasiones podremos, mediante ciertos argumentos, reducir un caso al anterior y obtener, como fruto, una ecuación general que liga los respectivos resultados. A este tipo de relaciones nos referiremos como ecuaciones de (o en) recurrencias, o simplemente recurrencia, y a ellas dedicamos este capítulo. No son asunto nuevo en este libro: hemos deducido ya recurrencias para coeficientes binómicos, números de Stirling, etc. También aparecieron en las discusiones sobre la transformada rápida de Fourier o el método de Strassen, por citar algunos ejemplos.

Para ilustrar la técnica “artesana” de esta forma de argumentar, comenzaremos con una sección en la que el lector podrá encontrar un amplio muestrario de cuestiones que nos conducen a ecuaciones en recurrencias, que clasificaremos en función de cuánta información sobre los casos anteriores hace falta conocer y de la complejidad de los casos en sí.

La sección 6.2 estará dedicada a la *resolución* de ecuaciones de recurrencia, es decir, a la obtención de fórmulas generales para las sucesiones de números que las verifican. Nos centraremos fundamentalmente en las *ecuaciones de recurrencia lineales y de coeficientes constantes*, que son quizás las más habituales, y sin duda las más sencillas. Pero la resolución de recurrencias es, en general, asunto complicado, y en la subsección 6.2.4. esbozaremos algunos argumentos que se pueden utilizar en su análisis. La extraordinariamente fructífera técnica general de las funciones generatrices, que permite, en principio, tratar un abanico más amplio de ecuaciones de recurrencia, habrá de esperar al capítulo 12.

En la última sección nos dejaremos deslumbrar por la razón áurea, producto de la ecuación en recurrencias más famosa y fascinante, la ecuación de Fibonacci.

## 6.1. Algunos ejemplos

Presentamos en esta sección inicial una serie de ejemplos, de naturaleza muy diversa, en cuyo análisis obtendremos un variado muestrario de ecuaciones de recurrencia. Podremos ya resolver algunas de ellas con trucos *ad hoc*; para las restantes habrá de esperar a disponer de técnicas más generales, como las que expondremos en la sección 6.2 y en el capítulo 12 dedicado a las funciones generatrices.

Por *resolver* una ecuación de recurrencia, que como ya hemos avisado suele ser tarea harto complicada, entendemos hallar una fórmula explícita para la sucesión de números que verifican la recurrencia.

### 1. En función del caso anterior

Las ecuaciones de recurrencia más sencillas son aquéllas en las que el valor de un cierto término de la sucesión depende únicamente del valor del término anterior.

**EJEMPLO 6.1.1** *Queremos contar el número de listas de longitud  $n \geq 1$  formadas con ceros y unos. Llamemos  $a_n$  a la respuesta, para cada  $n$ .*

No parece un ejemplo muy apasionante, dado que la regla del producto nos permite obtener directamente la respuesta:  $a_n = 2^n$ , para cada  $n \geq 1$ . Abordemos el problema desde otro punto de vista, planteando una recurrencia entre los números  $a_n$ . Para construir una lista de longitud  $n$  con ceros y unos tomamos primero una lista de longitud  $n-1$  con las características pedidas (lo podremos hacer de  $a_{n-1}$  formas distintas). Luego, a cada una de ellas, le añadimos un 0 o un 1, para obtener así todas las posibles listas de longitud  $n$ . Como este procedimiento asocia a cada posible lista de longitud  $n-1$  dos listas distintas de longitud  $n$ , se tendrá que

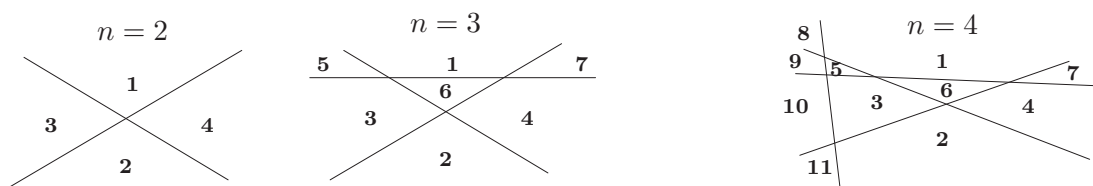
$$(*) \quad \boxed{a_n = 2 a_{n-1}} \quad \text{para } n \geq 2.$$

Necesitamos, además, un valor inicial, el número de listas de longitud 1:  $a_1 = 2$ . El problema queda así resuelto en el siguiente sentido: el conocimiento de  $a_1$  y la relación (\*) nos permiten calcular  $a_2$ ; con  $a_2$ , aplicando de nuevo (\*), evaluamos  $a_3$ , etc. Pero en este caso, además, podemos resolver la recurrencia y obtener una fórmula explícita para los  $a_n$ : basta aplicar reiteradamente la regla para obtener que, para cada  $n \geq 1$ ,

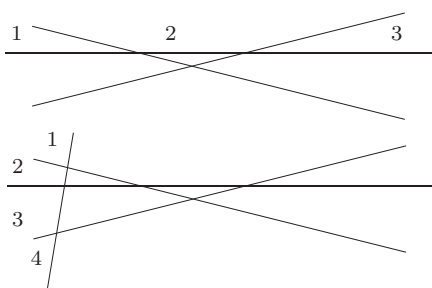
$$\boxed{a_n} = 2 a_{n-1} = 2 (2 a_{n-2}) = 2^2 a_{n-2} = 2^3 a_{n-3} = \dots = 2^{n-1} a_1 = \boxed{2^n}. \quad \clubsuit$$

**EJEMPLO 6.1.2** *Llamemos  $a_n$  al número de regiones del plano que determinan  $n$  rectas. Estas rectas deben ser tales que por cualquier punto del plano pasen a lo sumo dos de ellas; y tales que ninguna de ellas sea paralela a ninguna otra.*

Calculemos los primeros casos: para  $n = 1$ , tenemos una recta, que divide al plano en dos regiones. Para  $n = 2$ ,  $n = 3$  y  $n = 4$  aparecen cuatro, siete y once regiones, respectivamente:



(versión preliminar 28 de noviembre de 2011)



Ya tenemos los primeros cuatro valores  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 4$ ,  $a_3 = 7$  y  $a_4 = 11$ . Pero este análisis pictórico no nos va a llevar mucho más allá, pues el dibujo se complica enormemente y corremos el riesgo de olvidarnos alguna región. Toca pensar: fijémonos en cómo pasamos de  $n = 2$  a  $n = 3$ . Al añadir una recta, y como las dos rectas “viejas” deben cortar a la “nueva”, lo que hacemos es añadir tres regiones del plano. El paso del caso  $n = 3$  al caso  $n = 4$  es análogo (véase el segundo dibujo): de nuevo añadimos una recta, que corta a las tres existentes y crea cuatro regiones nuevas. La generalización de este argumento nos permite deducir que la regla de recurrencia es

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + n} \quad \text{para cada } n \geq 2.$$

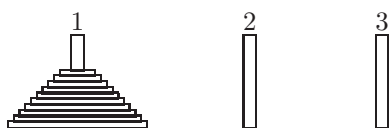
Como conocemos el valor para el primer caso,  $a_1 = 2$ , podremos calcularlos todos. El lector podrá resolver la recurrencia sin más que aplicar reiteradamente la regla de recursión. Alternativamente, como la regla de recurrencia nos dice que la diferencia entre dos términos consecutivos es justamente el valor del índice ( $a_n - a_{n-1} = n$ ), podemos escribir todas estas diferencias y sumarlas, como hacemos a la derecha. Como  $a_1 = 2$  y sabemos sumar los  $n$  primeros números naturales, llegamos a la solución final:

$$\begin{array}{rcl} a_n - a_{n-1} & = & n \\ a_{n-1} - a_{n-2} & = & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2 - a_1 & = & 2 \\ \hline a_n - a_1 & = & 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n \end{array}$$

$$\boxed{a_n} = 2 + \sum_{j=2}^n j = 1 + \sum_{j=1}^n j = \boxed{1 + \frac{n(n+1)}{2}} \quad \text{para cada } n \geq 1.$$



### EJEMPLO 6.1.3 Las torres de Hanoi.

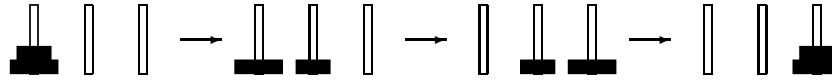


Cuenta la leyenda<sup>1</sup> que los monjes de un monasterio de Hanoi miden el tiempo que falta para la llegada del fin del mundo con el siguiente procedimiento: disponen de tres agujas de diamante, en una de las cuales se apilan 64 discos de oro distintos, ordenados por tamaños. Cada segundo mueven un disco de una aguja a otra, y su tarea finalizará (y con ella el mundo) cuando logren transportarlos todos a otra aguja. Pero, ¡atención!, a lo largo del proceso nunca se puede colocar un disco sobre otro de diámetro más pequeño.

Como prepararnos para el fin del mundo supondrá sin duda un notable ajeteo, vamos a estimar el tiempo de que dispondremos. Para ello, planteamos el problema ya en general: tenemos  $n$  discos y llamamos  $a_n$  al mínimo número de movimientos necesario para transportar los  $n$  discos desde una aguja a otra. Por ejemplo,  $a_1 = 1$ , porque nos basta con un movimiento para pasar el disco a otra aguja. El cálculo de  $a_2$  requiere ya un pequeño argumento: podemos,

<sup>1</sup>En realidad, la historia que sigue es el adorno literario que concibió el matemático francés Lucas en 1883.

por ejemplo, pasar el disco pequeño a otra aguja, luego el grande a la tercera, para finalmente pasar el pequeño a esta tercera aguja, como en la figura:



Como en dos movimientos no se puede hacer, concluimos que la descrita es la mejor estrategia posible, y que, por tanto,  $a_2 = 3$ .

Si partimos de tres discos, podemos pasar los dos menores a una segunda aguja (con el procedimiento anterior, de tres movimientos), luego pasar el mayor a la tercera aguja, para finalmente llevar los dos discos menores sobre ese disco mayor (de nuevo tres movimientos). En total, 7 movimientos. Aunque ahora no está claro si se puede hacer el trasvase con menos.

El procedimiento esbozado en el caso  $n = 3$  se puede generalizar: si tenemos  $n$  discos, pasamos  $n - 1$  a una segunda aguja, luego el mayor disco a la aguja final y, por último, pasamos los  $n - 1$  discos a esa tercera aguja. Es un algoritmo recursivo: el procedimiento para mover  $n$  discos se apoya, dos veces, en el (ya conocido) método para mover  $n - 1$ . Se deduce entonces que el número mínimo de movimientos para transportar  $n$  discos cumple que

$$a_n \leq 2a_{n-1} + 1 \quad \text{para cada } n \geq 2,$$

porque con  $2a_{n-1} + 1$  movimientos lo sabemos hacer. Obsérvese que no es una ecuación de recurrencia, sino una desigualdad. Pero lo que nos gustaría es comprobar que, en realidad, la relación se cumple con un  $=$  en lugar de un  $\leq$ . Deduciríamos así que nuestra estrategia de movimientos es la mejor posible. Esto requiere un argumento extra.

Veámoslo: si tenemos  $n$  discos, en algún momento tendremos que mover el disco mayor, para lo que necesitaremos haber llevado el resto de los discos a otra aguja, pues debe quedar una aguja libre. Esto requiere, como mínimo,  $a_{n-1}$  movimientos. Una vez movido el disco grande a una aguja, tendremos que mover los restantes  $n - 1$  discos sobre él, y esto exige, al menos, otros  $a_{n-1}$  movimientos (sea cual sea la estrategia que empleemos). Así que

$$a_n \geq 2a_{n-1} + 1,$$

para  $n \geq 2$ . Reuniendo ambas condiciones, ya podemos afirmar que, para cada  $n \geq 2$ ,

$$\boxed{a_n = 2a_{n-1} + 1}$$

La condición inicial ya la hemos visto, es  $a_1 = 1$ . La resolvemos por simple aplicación repetida de la regla de recurrencia:

$$\begin{aligned} \boxed{a_n} &= 2a_{n-1} + 1 = 2(2a_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 a_{n-2} + 2 + 1 = 2^2 (2a_{n-3} + 1) + 2 + 1 \\ &= 2^3 a_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 = 2^3 (2a_{n-4} + 1) + 2^2 + 2 + 1 = 2^4 a_{n-4} + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 \\ &= \dots = 2^{n-1} a_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1 = \sum_{j=0}^{n-1} 2^j = \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = \boxed{2^n - 1} \end{aligned}$$

Del caso  $n = 64$  deducimos que el fin del mundo llegará dentro de  $a_{64} = 2^{64} - 1$  segundos, esto es, ¡más de medio billón de años! Parece que, después de todo, la profecía de los monjes de Hanoi no debería ser una de nuestras mayores preocupaciones. ♣

(versión preliminar 28 de noviembre de 2011)

EJEMPLO 6.1.4 Calculemos el valor de la siguiente aparentemente complicada integral<sup>2</sup>:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt, \quad \text{para cada } n \geq 0.$$

El caso  $n = 0$  es muy sencillo:  $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 1$ . Vamos a obtener una ecuación de recurrencia para los números  $\Gamma(n)$ , pero no a través de argumentos combinatorios, como hasta ahora, sino por medio de *manipulaciones algebraicas* basadas en el método de integración por partes. Para  $n \geq 1$ , escogemos

$$\begin{aligned} u = t^n &\implies du = n t^{n-1} dt \\ dv = e^{-t} dt &\implies v = -e^{-t} \end{aligned}$$

para la aplicación de la habitual fórmula de integración por partes:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = \underbrace{-t^n e^{-t} \Big|_0^{\infty}}_{=0} + n \underbrace{\int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt}_{\Gamma(n)} = n \Gamma(n).$$

La ecuación de recurrencia resulta ser

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n \Gamma(n)} \quad \text{para } n \geq 1.$$

Obsérvese que ahora el coeficiente que acompaña al término anterior no es una constante. Aún así, la podemos resolver, de nuevo, por simple iteración:

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = n(n-1) \Gamma(n-1) = \dots = n(n-1) \dots 3 \cdot 2 \Gamma(1).$$

Como el valor inicial era  $\Gamma(1) = 1$ , concluimos que

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n!}$$



En estos primeros ejemplos nos ha bastado con argumentar sobre el caso anterior para obtener la ecuación de recurrencia. La estructura de las ecuaciones obtenidas, especialmente sencilla, nos ha permitido resolverlas por simple iteración. Aunque no siempre será ése el caso. Imagine el lector que la ecuación fuera  $a_n = a_{n-1}(1 - a_{n-1})$ , o quizás  $a_n = \sqrt{a_{n-1}}$ . Intente el lector resolverlas por iteración de la regla, y verá como no es sencillo. Algo más sobre esto, en la subsección 6.2.4.

En muchas cuestiones, nuestro análisis exigirá mirar varios de los casos anteriores: los dos anteriores, o quizás todos los anteriores, el que esté a la mitad del que estamos tratando. La resolución de estas recurrencias, como comprobará el lector, requiere técnicas más complicadas que la simple iteración.

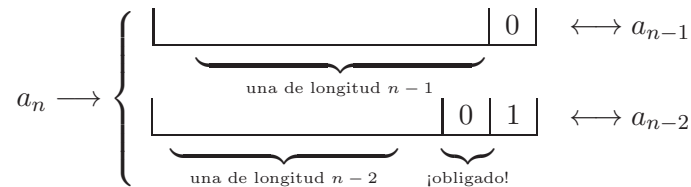
<sup>2</sup>Un caso particular de la *función gamma*, definida como  $\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt$  para  $z \in \mathbb{C}$  con  $\text{Re}(z) > -1$ .

**2. En función de los dos casos anteriores**

En muchas ocasiones, para determinar el valor de un término de la sucesión, bastará disponer del valor de los dos anteriores. Serán normalmente ejemplos en los que nos encontraremos con una disyuntiva: una opción nos llevará al caso anterior, mientras que la otra se escribirá en términos del que está dos posiciones más allá.

EJEMPLO 6.1.5 *Llamemos  $a_n$  al número de listas de longitud  $n$ , formadas con ceros y unos, que no tienen unos consecutivos.*

Nos fijamos, por ejemplo, en la última posición. Caben dos posibilidades, que la lista acabe en 0 ó en 1. Las que acaban en 0 se construyen dando una de longitud  $n - 1$  que cumpla las condiciones (ceros y unos, sin unos consecutivos) y añadiéndole un 0 al final (compruébese que es una biyección). Las acabadas en 1 llevan, necesariamente, un 0 en la penúltima posición; así que habrá tantas como listas de longitud  $n - 2$  que cumplan las condiciones:



Por tanto, la regla de recurrencia será, para cada  $n \geq 3$ ,

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Una ecuación muy especial, conocida como la **ecuación de Fibonacci**, que volverá a aparecer en los siguientes ejemplos. Observemos que los valores iniciales, que permiten “arrancar” a la sucesión, son aquí  $a_1 = 2$  y  $a_2 = 3$ . ♣

EJEMPLO 6.1.6 *Tenemos una escalera con  $n$  peldaños y en cada paso se permite subir 1 ó 2 peldaños. Llamamos  $a_n$  al número de formas distintas de subir la escalera con ese tipo de pasos (dos formas de subir serán distintas si la secuencia de pasos seguida es distinta).*

Para contar cuántas de estas peculiares ascensiones de una escalera con  $n$  peldaños hay, las clasificaremos atendiendo a cómo se completa la escalada. Hay dos posibilidades:

- llegar al peldaño  $n - 1$  y luego subir el último peldaño en un paso;
- o llegar al  $n - 2$  y luego un paso de dos peldaños.

Así que la relación de recurrencia es, de nuevo,  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  para cada  $n \geq 3$ . Aunque ahora los valores iniciales no son los del ejemplo anterior, sino que  $a_1 = 1$  y  $a_2 = 2$ . Como las condiciones iniciales son distintas, las sucesiones de números no coinciden, aunque en realidad una está desplazada una posición de la otra:

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$\dots$	
# $n$ -listas de ceros y unos sin unos consecutivos	$\longrightarrow$	2	3	5	8	13	21	$\dots$
# caminos en la escalera	$\longrightarrow$	1	2	3	5	8	13	$\dots$

Como veremos en el siguiente ejemplo, el comportamiento asintótico de la sucesión no depende de los valores iniciales, sino que viene dictado por la ecuación. ♣

*(versión preliminar 28 de noviembre de 2011)*

EJEMPLO 6.1.7 *Un modelo de cunicultura.*

FIGURA 6.1: Fibonacci

Cuenta la tradición que Fibonacci<sup>3</sup> introdujo la sucesión que lleva su nombre<sup>4</sup> como modelo para la reproducción de conejos. Partía de las siguientes hipótesis: (a) los conejos viven eternamente; (b) cada mes, un par de adultos de distinto sexo da lugar a un nuevo par de conejos de distinto sexo; y (c) cada conejo se hace adulto a los dos meses de vida, momento en el que comienza a tener descendencia. Reconocemos que no es un modelo muy realista, pero estamos en el siglo XII, ¡sea condescendiente el lector!

Llamemos  $F_n$  al número de pares de conejos al final del mes  $n$ . Partimos de un par de conejos que nacen en el primer mes; esto es,  $F_1 = 1$ . Un mes después seguimos con una pareja de conejos, todavía no adultos:  $F_2 = 1$ . En el tercer mes ya tenemos una pareja de adultos, que da lugar a una pareja de recién nacidos:  $F_3 = 2$ . En el cuarto mes seguiremos teniendo una pareja de adultos, que tendrá descendencia. Y la pareja nacida en el mes anterior tendrá ahora un mes. En total,  $F_4 = 3$ . Y así, sucesivamente.

La tabla de la derecha recoge las distintas poblaciones al comienzo de cada mes. El número de parejas en el mes  $n$  es la suma del número de parejas del mes  $n - 1$  más las nacidas en el propio mes  $n$ . De éstas hay

Mes	1	2	3	4	5	6	7	...
Parejas de adultos	0	0	1	1	2	3	5	...
Parejas de un mes de edad	0	1	0	1	1	2	3	...
Parejas de recién nacidos	1	0	1	1	2	3	5	...
Total de parejas, $F_n$	1	1	2	3	5	8	13	...

tantas como parejas *adultas* hubiera en el mes  $n$ . Y a su vez, tantas como parejas en el mes  $n - 2$  (pues se tardan dos meses en ser adulto). En total, para cada  $n \geq 3$ ,  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ , que es, de nuevo, la ecuación de Fibonacci. Si definimos  $F_0 = 0$ , la ecuación es válida para cada  $n \geq 2$ . En lo sucesivo reservaremos el nombre de  $F_n$  para los números siguientes:

**Definición 6.1** *La sucesión de números de Fibonacci ( $F_n$ ) cumple, para cada  $n \geq 2$ , que*

$$\boxed{F_n = F_{n-1} + F_{n-2}} \quad (\text{la ecuación de Fibonacci})$$

junto con las condiciones iniciales  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ . Los primeros términos de esta sucesión son

$F_0$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$	$F_{11}$	$F_{12}$	...
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	...

<sup>3</sup>La ilustración que aquí reproducimos es la cabeza de la estatua que los ciudadanos de Pisa erigieron cerca del río Arno en honor de su paisano Leonardo de Pisa (1170-1250), también llamado Fibonacci (hijo de Bonacci). Fibonacci viajó por el Mediterráneo y tomó contacto con las Matemáticas que los árabes habían recopilado. Su *Liber Abaci* de 1202 recogía numerosos resultados sobre Geometría y Teoría de Números, además de cuestiones prácticas sobre problemas mercantiles, métodos de multiplicación, etc. El texto estableció definitivamente en Occidente los numerales arábigos y el sistema hindú de numeración.

<sup>4</sup>Fue el matemático francés Edouard Lucas (1842-1891) quien así la bautizó. En el ejemplo 6.3.1 veremos una sucesión de números que lleva su nombre y que está muy relacionada con los de Fibonacci. Lucas trabajó fundamentalmente en Teoría de Números, con estudios sobre la sucesión de Fibonacci o sobre criterios de primalidad (criterio de Lucas-Lehmer). También gustaba de proponer juegos y acertijos matemáticos (como el de las torres de Hanoi que vimos en el ejemplo 6.1.3), que recogió en sus *Récréations mathématiques* de 1882.

En el ejemplo 6.2.1 obtendremos una fórmula para estos números  $F_n$ , que ya adelantamos que es aparatosa, y cuando menos sorprendente. Pero sin necesidad de conocer la técnica que nos permitirá resolver la ecuación, podemos analizar ya el *comportamiento asintótico*, es decir, el orden de magnitud de los números  $F_n$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Empecemos calculando los valores numéricos de sucesivas razones de números de Fibonacci consecutivos:

1/1	2/1	3/2	5/3	8/5	13/8	21/13	34/21	55/34	89/55	144/89	...
1	2	1.5000	1.6666	1.6000	1.6250	1.6153	1.6190	1.6176	1.6181	1.6179	...

Que parecen indicar que los números  $F_n$  crecen, más o menos, con una tasa fija, pues el cociente de dos números de Fibonacci consecutivos  $F_n/F_{n-1}$  es, aproximadamente, como una constante  $x > 1$  (en torno a 1.61 “y pico”) cuando  $n$  es grande. En otras palabras, parece que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = x.$$

Si fuera cierta esta intuición heurística, ¿qué condición habría de cumplir ese hipotético número  $x$ ? Reescribamos la ecuación de Fibonacci para exhibir cocientes de términos consecutivos:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \implies \frac{F_n}{F_{n-1}} = 1 + \frac{1}{F_{n-1}/F_{n-2}}.$$

Pasando al límite  $n \rightarrow \infty$ , el número  $x$  debería cumplir que

$$x = 1 + \frac{1}{x}; \quad \text{o en otras palabras, que } x^2 - x - 1 = 0,$$

una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  y  $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ . El segundo número es negativo, por lo que no puede ser esa tasa fija de crecimiento, pues los  $F_n$  son positivos. El otro, la raíz positiva de la ecuación, es un número que ya apareció en el capítulo 1: la **razón áurea**  $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , a cuyas asombrosas peculiaridades dedicaremos toda la sección 6.3.

Pongámonos serios (y formales): ¿es cierto o no que  $F_n/F_{n-1}$  tiende a  $\tau$  cuando  $n \rightarrow \infty$ ? Restamos primero  $\tau$  a ambos lados de la ecuación de Fibonacci (en su versión de cocientes), utilizamos que  $\tau = 1 + 1/\tau$  y reordenamos los términos astutamente, para obtener que:

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} - \tau = 1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} - \tau = \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} - \frac{1}{\tau} = -\frac{1}{\tau} \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} \left[ \frac{F_{n-1}}{F_{n-2}} - \tau \right].$$

Ahora, tomamos valores absolutos:

$$\left| \frac{F_n}{F_{n-1}} - \tau \right| = \frac{1}{\tau} \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} \left| \frac{F_{n-1}}{F_{n-2}} - \tau \right| < \frac{1}{\tau} \left| \frac{F_{n-1}}{F_{n-2}} - \tau \right|,$$

donde hemos utilizado que los números de Fibonacci forman una sucesión creciente y que, por tanto,  $F_{n-2}/F_{n-1} < 1$ . Obsérvese la simetría de la expresión: a la derecha y a la izquierda tenemos la diferencia entre un cociente de números de Fibonacci consecutivos y la razón áurea; ¡pero a la derecha, de índices más pequeños! Iterando esta desigualdad, llegamos a que

$$\left| \frac{F_n}{F_{n-1}} - \tau \right| < \frac{1}{\tau} \left| \frac{F_{n-1}}{F_{n-2}} - \tau \right| < \frac{1}{\tau^2} \left| \frac{F_{n-2}}{F_{n-3}} - \tau \right| < \dots < \frac{1}{\tau^{n-2}} \left| \frac{F_2}{F_1} - \tau \right| = \frac{1}{\tau^{n-2}} |1 - \tau|.$$

Como  $\tau > 1$ , deducimos que  $|F_n/F_{n-1} - \tau| \rightarrow 0$ ; es decir:  $F_n/F_{n-1} \rightarrow \tau$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Lo que, en esencia, nos dice que  $F_n \sim \tau^n$  cuando  $n$  es grande, lo que comprobaremos en el ejemplo 6.2.1, ya con la ayuda de la fórmula explícita de los  $F_n$ . ♣

(versión preliminar 28 de noviembre de 2011)



EJEMPLO 6.1.8 *Desbarajustes.*

En el ejemplo 3.1.5 nos ocupamos del número  $D_n$  de desbarajustes de  $\{1, \dots, n\}$ , las permutaciones de  $\{1, \dots, n\}$  en las que ningún símbolo ocupaba su posición natural. Obtuvimos entonces una fórmula (un tanto complicada) para  $D_n$ , utilizando el principio de inclusión/exclusión. Buscamos ahora una relación de recurrencia para estos números.

Los primeros valores son fáciles de calcular, por simple enumeración de casos:  $D_1 = 0$ ,  $D_2 = 1$  y  $D_3 = 2$ . Analicemos el caso  $n = 4$ , que ya contiene los ingredientes del caso general. Tomemos un desbarajuste de los que cuenta  $D_3$ ; por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Queremos construir un desbarajuste de cuatro posiciones a partir de él. El elemento 4 no puede ir en la cuarta posición (no sería desbarajuste), así que necesariamente ha de ir en una de las tres anteriores. Si va, por ejemplo, en la primera, colocaremos en la cuarta posición el elemento que antes iba en la primera (para que siga siendo un desbarajuste); y lo mismo si va en la segunda o en la tercera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & \bullet \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Así que, para cada desbarajuste de tres posiciones podemos formar 3 desbarajustes de cuatro posiciones (uno por cada posible posición en la que colocar el 4). Sin embargo, hay desbarajustes de cuatro posiciones que no podemos construir de esta manera: por ejemplo, el siguiente:

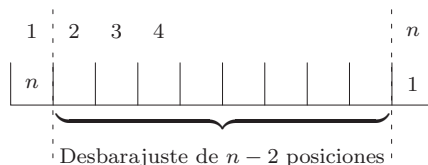
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

pues construir este desbarajuste con el procedimiento anterior requeriría haber partido de una permutación que no es un desbarajuste, la lista  $(1, 3, 2)$ . Aunque convendrá el lector que este desbarajuste de longitud 4 es muy especial: en él, el 4 y el 1 forman un ciclo.

Contamos el número de este tipo de desbarajustes de la siguiente manera: primero, decidimos con qué elemento el 4 forma ciclo (3 posibilidades, el elemento 1, el 2 o el 3); para luego hacer un desbarajuste con los restantes (dos) elementos. En total, hay  $3D_2$  desbarajustes de éstos. De donde deducimos que

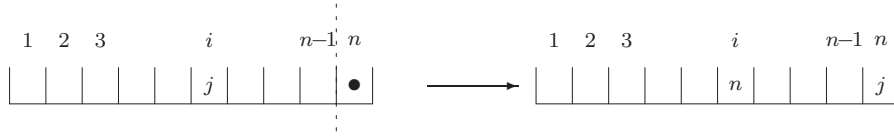
$$D_4 = 3D_3 + 3D_2.$$

Argumentemos en general, para un  $D_n$  cualquiera. Tenemos, por un lado, los desbarajustes en los que  $n$  forma una transposición con algún otro elemento. En el esquema de la derecha, el 1. De éstos tendremos  $(n - 1)D_{n-2}$ , porque hay  $n - 1$  candidatos a formar la transposición con  $n$ , y  $D_{n-2}$  cuenta los desbarajustes de  $n - 2$  símbolos.



Contemos ahora los restantes, aquellos desbarajustes en los que el elemento  $n$  no forma ciclo de orden 2 con otro elemento. Estos desbarajustes se pueden formar a partir de los de

$n - 1$  posiciones con el siguiente proceso: por cada desbarajuste de  $n - 1$  posiciones, elegimos una posición  $i$  para colocar el elemento  $n$ ; en la posición  $n$  colocamos lo que hubiera en la posición  $i$ .



De éstas habrá  $(n - 1)D_{n-1}$ . En total,

$$\boxed{D_n = (n - 1)D_{n-1} + (n - 1)D_{n-2}} \quad \text{para } n \geq 3.$$

Note el lector que esta relación requiere, para obtener el valor de un cierto término, el conocimiento de los dos anteriores. Pero, a diferencia de lo que ocurría con los ejemplos anteriores, *los coeficientes no son constantes*, sino que dependen del paso en que estemos.

Afortunadamente, podemos encontrar un truco que nos permite reducir esta ecuación a una que sólo involucra el término anterior, que resolveremos luego por simple iteración. La clave es observar que podemos reescribir la recurrencia como

$$D_n - nD_{n-1} = -D_{n-1} + (n - 1)D_{n-2} = -[D_{n-1} - (n - 1)D_{n-2}].$$

En estos nuevos términos, sólo queda iterar la relación:

$$\begin{aligned} D_n - nD_{n-1} &= -[D_{n-1} - (n - 1)D_{n-2}] = (-1)^2 [D_{n-2} - (n - 2)D_{n-3}] = \\ &= \dots = (-1)^{n-2} [D_2 - 2D_1] = (-1)^{n-2} = (-1)^n, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado los valores iniciales  $D_2 = 1$  y  $D_1 = 0$ . Así que, para cada  $n \geq 2$ ,

$$D_n - nD_{n-1} = (-1)^n,$$

que, obsérvese, involucra sólo el término anterior. Si dividimos toda la expresión por  $n!$ ,

$$\frac{D_n}{n!} - \frac{D_{n-1}}{(n - 1)!} = \frac{(-1)^n}{n!},$$

obtenemos una ecuación que se resuelve con el procedimiento (ya visto en el ejemplo 6.1.2) de sumar todas estas expresiones desde  $n$  hasta 1. Así llegamos a que

$$\frac{D_n}{n!} - \frac{D_1}{1!} = \sum_{j=2}^n \frac{(-1)^j}{j!}.$$

En otras palabras, como  $D_1 = 0$ ,

$$\boxed{D_n} = n! \sum_{j=2}^n \frac{(-1)^j}{j!} = \boxed{n! \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!}}$$

porque los términos  $j = 0$  y  $j = 1$  se cancelan entre sí. Es, claro, el mismo resultado que el que obteníamos con el principio de inclusión/exclusión. Recuérdese que el sumatorio de esa expresión es, muy aproximadamente,  $1/e$  (si  $n$  es grande). ♣

(versión preliminar 28 de noviembre de 2011)

En el siguiente ejemplo, las “condiciones iniciales” que determinan, junto a la ecuación de recurrencia, los valores de la sucesión, son un tanto inusuales.

EJEMPLO 6.1.9 *La ruina del jugador*<sup>5</sup>.

Para analizar este ejemplo, al que volveremos en diversas ocasiones a lo largo de este capítulo, apelaremos a que el lector está familiarizado con ciertos conceptos probabilísticos, en particular, con la noción de probabilidad condicionada (en caso contrario, puede consultarse primero el capítulo 7).

Queremos apostar nuestro dinero en un cierto juego. En cada partida apostamos 1 euro. Si ganamos, nos devuelven el euro apostado junto con otro más, y en caso contrario perdemos el euro apostado. La probabilidad de ganar cada partida es  $p$ , un número entre 0 y 1 (la de perder será  $q = 1 - p$ ). Fijamos *a priori* una cota de  $N$  euros, y sólo abandonaremos el juego cuando nuestra fortuna acumulada tras sucesivas partidas la haya alcanzado o cuando nos hayamos arruinado<sup>6</sup>. Supongamos que al empezar a jugar disponemos de  $n$  euros ( $0 \leq n \leq N$ ). La pregunta es: ¿cuál es la probabilidad, que llamaremos  $a(n)$ , de que nos arruinemos?

Observe el lector que  $a(0) = 1$ , porque si la fortuna inicial es 0, no podremos ni siquiera empezar a jugar. Por otro lado,  $a(N) = 0$ , porque si al principio tenemos  $N$  euros, tal y como hemos convenido, nos retiramos. Como decíamos antes, no son éstas unas condiciones iniciales al uso, pero serán suficientes<sup>7</sup>.

Supongamos que  $0 < n < N$ . Para obtener la regla de recurrencia que cumplen los  $a(n)$ , vamos a condicionar sobre el resultado de la primera partida. Llamemos  $G$  al suceso “ganar la primera” (cuya probabilidad es  $p$ ) y  $P$  al suceso “perder la primera” (de probabilidad  $q = 1 - p$ ). Entonces,

$$\mathbf{P}(\text{ruina}) = \mathbf{P}(\text{ruina}|G) \mathbf{P}(G) + \mathbf{P}(\text{ruina}|P) \mathbf{P}(P).$$

Pero si hemos ganado la primera partida, tendremos  $n + 1$  euros; y la probabilidad de arruinarnos es la misma que si hubiéramos empezado a jugar con esos  $n + 1$  euros. El mismo argumento, hecho para el caso de la pérdida de la primera partida, nos lleva a que

$$a(n) = p a(n + 1) + q a(n - 1) \quad \text{para cada } 1 \leq n \leq N - 1.$$

Relación que conviene escribir como

$$\boxed{a(n + 2) = \frac{1}{p} a(n + 1) - \frac{q}{p} a(n)} \quad \text{para cada } 0 \leq n \leq N - 2$$

Emplazamos al lector ávido por conocer la solución del problema a que revise el ejemplo 6.2.2, donde podrá comprobar la extraordinaria importancia que tiene el que estemos ante un “juego equilibrado” ( $p = q = 0.5$ ) o no ( $p \neq q$ ). ♣

<sup>5</sup>¿O es que quizás conoce el lector algún jugador que no acabe en la ruina?

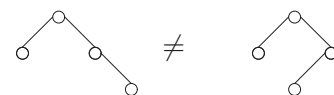
<sup>6</sup>¿Acaso podríamos estar jugando indefinidamente? No es el caso: se puede demostrar, pero esto requiere el manejo del cálculo de probabilidades, que el juego acaba, con uno u otro resultado, con probabilidad 1.

<sup>7</sup>Quizás el lector avezado preferiría llamarlas *condiciones de contorno* o de frontera.

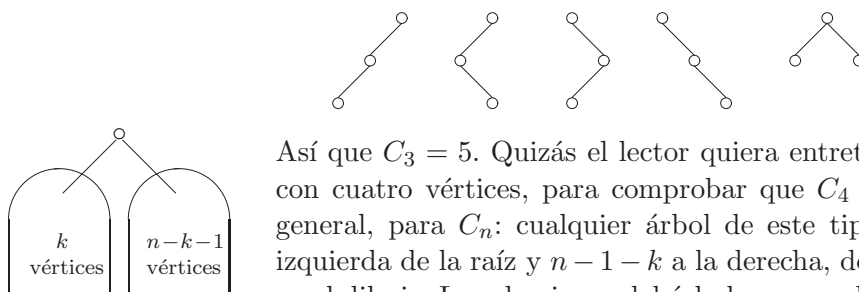
### 3. En función de todos los casos anteriores

EJEMPLO 6.1.10 Contemos el número de árboles con raíz casi binarios que podemos formar con  $n$  vértices y en los que distinguiremos entre “derecha” e “izquierda”.

Aunque más adelante (en la sección 10.2.3) los estudiaremos con más detalle, no es difícil entender lo que es un árbol binario con raíz: la raíz es el vértice que situamos (curiosamente)



más arriba, y el que sea (casi)binario quiere decir que cada vértice puede tener hasta dos “descendientes” hacia abajo. En cuanto a la diferencia entre “izquierda” y “derecha”, el dibujo de la derecha muestra dos árboles que nosotros consideraremos como distintos. Sea  $C_n$  el número de árboles con estas características. Los primeros valores son  $C_1 = 1$  y  $C_2 = 2$ . En el siguiente dibujo exhibimos los cinco árboles distintos que se pueden formar con tres vértices:



Así que  $C_3 = 5$ . Quizás el lector quiera entretenerse dibujando árboles con cuatro vértices, para comprobar que  $C_4 = 14$ . Argumentemos en general, para  $C_n$ : cualquier árbol de este tipo tendrá  $k$  vértices a la izquierda de la raíz y  $n - 1 - k$  a la derecha, donde  $0 \leq k \leq n - 1$ , como en el dibujo. Las elecciones del árbol que va a la izquierda de la raíz y la del que va a la derecha son independientes, y para contar el número de posibles elecciones de ambos tendremos en cuenta la diferencia izquierda-derecha. Aplicando las reglas de la suma y del producto y definiendo, como resulta conveniente,  $C_0 = 1$ , obtenemos que

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \cdots + C_{n-2} C_1 + C_{n-1} C_0 = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$$

La recurrencia es bastante complicada: para calcular un cierto término  $C_n$ , necesitamos conocer (y combinar de la manera que nos dice la fórmula) todos los anteriores. Por ejemplo,  $C_1 = C_0 C_0 = 1$ ; mientras que  $C_2 = C_0 C_1 + C_1 C_0 = 2$ , o quizás  $C_3 = C_0 C_2 + C_1 C_1 + C_2 C_0 = 2 + 1 + 2 = 5$ .

Ya vimos, en el ejemplo 2.3.3, que ésta era la recurrencia que verificaban los llamados *números de Catalan*. Así que ésta de los árboles binarios es otra cuestión cuya respuesta está en los números de Catalan. El lector podrá recordar otras interpretaciones (formas de situar paréntesis para multiplicar, perfiles montañosos, triangulaciones de polígonos) en el citado ejemplo 2.3.3 y en el ejercicio 2.3.6.

Ya obtuvimos, usando argumentos combinatorios, una fórmula explícita para estos números en el ejemplo 3.1.6,

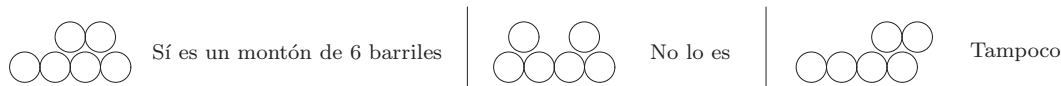
$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Reconozca el lector que la fórmula es un tanto insospechada. Volveremos a obtenerla, con la técnica de las funciones generatrices, en el ejemplo 12.4.5. ♣

(versión preliminar 28 de noviembre de 2011)

EJEMPLO 6.1.11 *El problema de los montones de barriles.*

Miramos, desde un lateral, la carga de un camión lleno de barriles de cerveza<sup>8</sup>. Nos interesan las disposiciones de barriles en las que, en cada fila, los barriles forman *una tira continua*; y cada barril, por una simple cuestión de equilibrio, ha de apoyarse en dos de la fila inferior:



Interesa conocer  $M_n$ , el número de montones distintos que tienen  $n$  barriles en la fila base.

Por ejemplo,  $M_1 = 1$  y  $M_2 = 2$ . Si  $n = 3$ , tenemos los cinco posibles montones del dibujo. Compruebe el lector que hay 13 posibles montones con 4 barriles en la base.



Cualquier montón con  $n$  barriles en la base tiene “encima” un montón con una base de  $j$  barriles, donde  $0 \leq j \leq n-1$ . Una vez elegido  $j$  y decidido que tipo de montón es (de los  $M_j$  posibles), solo queda colocarlo: si  $j = 0$ , no tenemos elección (y queda únicamente la fila original); pero si  $j \neq 0$ , el lector puede comprobar que hay  $n-j$  posibles posiciones. Así que

$$M_n = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)M_j \quad \text{para cada } n \geq 2.$$

De nuevo, una recurrencia que mira todos los casos anteriores. Más adelante (véase el ejemplo 12.4.4) deduciremos que  $M_n = F_{2n-1}$ , para cada  $n \geq 1$ . ♣

EJEMPLO 6.1.12 *Los números de Bell.*

El número de Bell  $B(n)$  cuenta, como ya vimos en la subsección 3.3.1, el número total de particiones de  $\{1, \dots, n\}$  en bloques no vacíos:  $B(1) = 1$ ,  $B(2) = 2$ ,  $B(3) = 5$ , etc. Por comodidad, vamos a obtener una regla de recurrencia para  $B(n+1)$  (como ya pedíamos hacer en el ejercicio 3.3.3). Nos fijamos en un bloque especial, el que contiene al elemento  $n+1$ . El bloque llevará otros elementos, un cierto subconjunto de  $\{1, \dots, n\}$ . Llamemos  $n-k$  al tamaño de ese subconjunto, donde  $0 \leq k \leq n$  (obsérvese que tanto  $k = 0$  como  $k = n$  están permitidos). Así que primero elegimos los acompañantes del  $n+1$  (de  $\binom{n}{n-k}$  maneras), para luego partir en bloques los  $k$  elementos restantes. En conclusión, para cada  $n \geq 1$ ,

$$B(n+1) = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{n-k} B(k) \implies B(n+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(k) \quad \text{para cada } n \geq 0.$$

A la derecha hemos decidido, por convenio (y comodidad), que  $B(0) = 1$ . No disponemos de una fórmula sencilla para estos números de Bell, aunque quizás el lector acepte, como fórmula, o al menos como método rápido de cálculo, la siguiente:

$$B(n) = \frac{1}{e} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^n}{j!}$$

Véanse los detalles en el ejercicio 12.4.6. ♣

<sup>8</sup>Dejamos al lector que proponga la marca, en función de su ideología cervecera.

#### 4. Mirando lejos

En los ejemplos vistos hasta aquí, el cálculo de un término de la sucesión requiere el conocimiento del anterior, de los dos anteriores... e incluso de todos los anteriores. Pero a veces la recurrencia es más caprichosa, y exige buscar el término que esté un cierto número de posiciones antes, o todas las de un cierto bloque anterior de la sucesión.

**EJEMPLO 6.1.13** *Un algoritmo para calcular el máximo y el mínimo de  $n$  números.*

La estrategia que seguiremos se inscribe dentro de los procedimientos de “divide y vencerás”, de los que ya hemos visto algún ejemplo anteriormente: las multiplicaciones de números o matrices de las secciones 4.5 y 4.4, o la Transformada rápida de Fourier de la subsección 4.6.5. Partimos de una lista de  $n$  números  $(a_1, \dots, a_n)$  y queremos determinar el mayor y el menor de ellos utilizando comparaciones entre pares de números. Para cada  $n \geq 2$ , vamos a llamar  $C_n$  al número de comparaciones necesarias para determinar el máximo y el mínimo de los  $n$  números siguiendo el procedimiento que pasamos a describir.

Supongamos que  $n$  es par. El primer caso, algo especial, es  $C_2 = 1$ , pues basta con hacer una comparación para determinar cuál de los dos números es mayor y cuál menor. Si  $n \geq 4$ , partimos la lista exactamente por la mitad. Para obtener el máximo y el mínimo de los  $n$  números, determinamos primero el máximo y el mínimo de cada uno de los bloques, y luego comparamos el máximo de los dos bloques (una comparación) y el mínimo de los dos (otra comparación). Así que

$$C_n = C_{\frac{n}{2}} + C_{\frac{n}{2}} + 2 \quad \text{para cada } n \text{ par } \geq 4.$$

Para el caso de longitud  $n$  impar, de nuevo  $n = 3$  es especial, y el resultado es  $C_3 = 3$ . El argumento general, para  $n = 2k + 1 \geq 5$  es como el de antes, con la salvedad de que ahora debemos cortar en un bloque de  $k$  números y otro de  $k + 1$ . Si el lector completa el argumento para este caso y reúne los dos, llegará a la fórmula general siguiente:

$$C_n = C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + C_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + 2 \quad \text{para cada } n \geq 4,$$

que junto con los valores  $C_2 = 1$  y  $C_3 = 3$  permite obtener la sucesión  $(C_n)$  completa. Volveremos sobre este tipo de recurrencias en la subsección 6.2.4. ♣

**EJEMPLO 6.1.14** *Los números de Leibniz.*

Escribimos los números naturales en base 2:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	...

y sumamos los dígitos de esos desarrollos binarios. Llamemos  $L(n)$  al resultado de esas sumas:

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
$L(n)$	0	1	1	2	1	2	2	3	1	2	2	3	2	3	3	4	...

(versión preliminar 28 de noviembre de 2011)

Se cuenta que fue Leibniz el que primero se fijó en la sucesión  $(L(n))$  mientras esperaba a ser recibido en audiencia por el Papa, a quien iba a plantear una propuesta para unificar las distintas iglesias cristianas<sup>9</sup>. Obsérvese que si, para un cierto  $k$ ,  $n < 2^k$ , entonces los desarrollos binarios de  $n$  y  $n + 2^k$  coinciden excepto en la primera posición:  $n + 2^k$  llevaría un 1 y a  $n$  le podemos poner un 0. De manera que

$$\boxed{L(n + 2^k) = L(n) + 1}$$

si  $0 \leq n < 2^k$ . Así que para calcular el valor de  $L(n + 2^k)$  necesitamos mirar al número  $L(n)$ , que está mucho antes en la sucesión.



FIGURA 6.2: Leibniz

Veamos cómo se generan recursivamente los valores de la sucesión: los vamos a agrupar dependiendo del bloque diádico  $[2^k, 2^{k+1})$  al que pertenezcan. Empezamos con

$$(L(0), L(1)) = (0, 1)$$

y entonces

$$(L(2), L(3)) = (L(0 + 2), L(1 + 2)) = (L(0) + 1, L(1) + 1) = (0, 1) + (1, 1) = (1, 2).$$

El siguiente bloque se obtendría

$$\begin{aligned} (L(4), L(5), L(6), L(7)) &= (L(0 + 4), L(1 + 4), L(2 + 4), L(3 + 4)) \\ &= (L(0) + 1, L(1) + 1, L(2) + 1, L(3) + 1) = (0, 1, 1, 2) + (1, 1, 1, 1) = (1, 2, 2, 3). \end{aligned}$$

El procedimiento es sencillo: para calcular los de un bloque diádico, tomamos la lista de *todos* los anteriores y les sumamos, a cada uno de ellos, 1. Por ejemplo, el siguiente bloque sería

$$\begin{aligned} (L(8), L(9), L(10), L(11), L(12), L(13), L(14), L(15)) &= \\ &= (L(0), L(1), L(2), L(3), L(4), L(5), L(6), L(7)) + (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) = (1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 4). \end{aligned}$$

Obsérvese que estos números cumplen además que

$$\boxed{L(2n) = L(n)},$$

porque multiplicar por 2 significa rodar los coeficientes del desarrollo binario de  $n$  una unidad, añadir un cero a la derecha: por ejemplo,  $7 = (101)_2$  y  $14 = (1010)_2$ ;  $31 = (11111)_2$  y  $62 = (111110)_2$ . ♣

<sup>9</sup>Los matemáticos de antaño tenían intereses muy diversos. En todo caso, curiosa manera de preparar una entrevista para un asunto de tan aparente trascendencia. Gottfried Leibniz (1646-1716), el matemático y filósofo alemán protagonista de este chascarrillo, es considerado, junto con Newton, el inventor del Cálculo. Leibniz inventó notaciones que han llegado a nuestros días, como  $dx$  o el símbolo  $\int$ , y reglas (que hoy llevan su nombre) como la de diferenciación de productos. Para 1676 había completado su formulación del Cálculo, incluyendo el Teorema Fundamental. Newton había desarrollado su método de fluxiones en 1671, aunque su trabajo no fue publicado hasta 1736, y acusó a Leibniz de plagio. Una polémica histórica: ¿quién fue antes? Fuera quien fuera, parece claro que ambos llegaron a sus conclusiones de manera independiente y que, por supuesto, ambos merecen una posición destacada en el Olimpo matemático.

### 5. Ecuaciones con dos parámetros

En el capítulo 3 analizamos diversas familias de números que dependen de dos parámetros: coeficientes binómicos, números de Stirling de primera y segunda especie, número de particiones de un entero en un cierto número de partes, etc. Para cada uno de ellos, encontramos relaciones de recurrencia y valores iniciales que permitían calcularlos. Por recordarlos, veamos un par de casos.

EJEMPLO 6.1.15 *Coefficientes binómicos y números de Stirling de segunda especie.*

El número de subconjuntos de tamaño  $k$  que se pueden extraer del conjunto  $\{1, \dots, n\}$ ,  $C(n, k)$ , satisface la recurrencia doble

$$C(n, k) = C(n-1, k) + C(n-1, k-1)$$

para cada  $n \geq 1$  y para cada  $k \geq 1$ . Las condiciones iniciales son las de los bordes del triángulo de Tartaglia:  $C(n, 0) = 1$ , para todo  $n \geq 0$  y  $C(n, n) = 1$ , para todo  $n \geq 0$ . Disponemos, además, de una fórmula cerrada para estos números:

$$C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

válida para cada  $n, k \geq 0$ . Sobre lo eficaz que resulta el cálculo con la fórmula o con la recurrencia ya reflexionamos en la subsección 3.1.1.

Cuando contábamos el número de particiones en  $k$  bloques no vacíos del conjunto  $\{1, \dots, n\}$ , obteníamos los números de Stirling de segunda especie,  $S(n, k)$ , que satisfacían la relación

$$S(n, k) = kS(n-1, k) + S(n-1, k-1)$$

junto con los valores frontera  $S(n, n) = 1$  y  $S(n, 1) = 1$ . También en esta ocasión tenemos una “fórmula”:

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n,$$

algo complicada, en todo caso. ♣

### 6. Sistemas de ecuaciones

A veces, asociadas a un cierto parámetro, digamos  $n$ , tenemos dos (o más) sucesiones de números. Calcular un término de una de estas sucesiones puede involucrar, tanto a términos de su propia sucesión, como a términos de la otra (u otras). En estos casos, tendremos un sistema de ecuaciones de recurrencia.

EJEMPLO 6.1.16 *Calculemos  $a_n$ , el número de listas de longitud  $n$  con ceros y unos con un número par (o cero) de ceros.*

Argumentamos como en el ejemplo 6.1.5, clasificando las listas que cuenta  $a_n$  en función del último símbolo: si es un 1, el resto de la lista no es sino una de longitud  $n-1$  con ceros y unos con un número par de ceros (de las que hay  $a_{n-1}$ ). Pero si aparece un 0, lo que queda es una lista de longitud  $n-1$  con un número *impar* de ceros.

(versión preliminar 28 de noviembre de 2011)



Estas últimas listas son objetos nuevos. Sin arredrarnos ante la dificultad, llamamos  $b_n$  al número de  $n$ -listas de ceros y unos con un número impar de ceros. El argumento de clasificación, que recogemos gráficamente a la derecha, nos dice que

$$a_n \rightarrow \begin{cases} \underbrace{\quad\quad\quad}_n | 1 | \longleftrightarrow a_{n-1} \\ \text{número par de ceros} \\ \underbrace{\quad\quad\quad}_n | 0 | \longleftrightarrow b_{n-1} \\ \text{número impar de ceros} \end{cases}$$

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1}, \quad \text{para } n \geq 2.$$

Los valores iniciales son  $a_1 = b_1 = 1$ . Necesitamos una ecuación para la nueva sucesión ( $b_n$ ). Clasificando como antes, llegamos al siguiente **sistema de ecuaciones de recurrencia**,

$$(*) \quad \begin{cases} a_n = a_{n-1} + b_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} + b_{n-1} \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

(a la derecha hemos escrito el sistema en forma matricial). En la subsección 6.2.3 emplearemos técnicas del Álgebra Lineal (cálculo de autovalores, diagonalización) para resolver el sistema.

Aunque como este caso es especialmente sencillo, podemos resolverlo directamente. Por ejemplo, el sistema (\*) nos dice que  $a_n = b_n$ . Además,  $a_n + b_n$  es el número total de listas,  $2^n$ . De donde obtenemos que  $a_n = 2^{n-1}$  para cada  $n$ . ♣

## 7. Desdoblamiento

En ocasiones, una sucesión de números obedece a varias ecuaciones de recurrencia; o, más bien, en la sucesión conviven varias subsucesiones (por ejemplo, los términos de índice par y los de índice impar), cada una de las cuales tiene su propia ecuación.

EJEMPLO 6.1.17 Queremos calcular la integral  $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$ , para cada entero  $n \geq 0$ .

Para calcular  $J_0$  usamos el cambio de variables  $x = \sin(t)$ :

$$J_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\cos(t)} dt = \frac{\pi}{2}.$$

La integral  $J_1$  es aún más sencilla:

$$J_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 = 1.$$

La relación de recurrencia se obtiene integrando por partes, como en el ejemplo 6.1.4: elegimos

$$\begin{cases} u = x^{n-1}, & du = (n-1)x^{n-2}; \\ dv = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx, & v = -\sqrt{1-x^2}, \end{cases}$$

para obtener que, para  $n \geq 2$ ,

$$J_n = -x^{n-1}\sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 + (n-1) \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1-x^2} dx = (n-1) \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1-x^2} dx.$$

(versión preliminar 28 de noviembre de 2011)

Ahora, reescribimos la integral

$$\begin{aligned} J_n &= (n-1) \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1-x^2} dx = (n-1) \int_0^1 x^{n-2} \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= (n-1) \underbrace{\int_0^1 \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1-x^2}} dx}_{J_{n-2}} - (n-1) \underbrace{\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx}_{J_n}, \end{aligned}$$

para obtener, reordenando términos, llegamos a que

$$\boxed{J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}} \quad \text{para cada } n \geq 2.$$

Una recurrencia que se resuelve por simple iteración. Observemos que los términos pares y los impares forman dos sucesiones independientes. Por ejemplo, en el caso par,  $n = 2k$ ,

$$J_{2k} = \frac{2k-1}{2k} J_{2k-2} = \frac{(2k-1)(2k-3)}{(2k)(2k-2)} J_{2k-4} = \cdots = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1}{(2k)(2k-2)\cdots 4 \cdot 2} \underbrace{J_0}_{=\pi/2}.$$

Multiplicando numerador y denominador por los factores pares que faltan, llegamos a que

$$\boxed{J_{2k}} = \frac{(2k)!}{(2k(2k-2)\cdots 4 \cdot 2)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2k)!}{(2^k k(k-1)\cdots 2 \cdot 1)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2} \frac{\pi}{2} = \boxed{\binom{2k}{k} \frac{\pi}{2^{2k+1}}}$$

Una manipulación parecida llevó a Wallis a una fórmula para estimar el valor de  $\pi$  (véase la subsección 2.4.4). Y en el caso impar,  $n = 2k + 1$ ,

$$J_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} J_{2k-1} = \frac{(2k)(2k-2)}{(2k+1)(2k-1)} J_{2k-3} = \cdots = \frac{(2k)(2k-2)\cdots 4 \cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\cdots 5 \cdot 3} \underbrace{J_1}_{=1}.$$

Reescribiendo adecuadamente los factores, obtenemos que

$$\boxed{J_{2k+1}} = \frac{(2^k k!)^2}{(2k+1)!} = \boxed{\frac{2^{2k}}{2k+1} \frac{1}{\binom{2k}{k}}}$$

Obsérvese que se tiene que

$$J_{2k} J_{2k+1} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2k+1},$$

de manera que bastaría calcular una de las dos sucesiones. ♣

## 8. Modelos dinámicos discretos

Es frecuente que el análisis de la evolución en el tiempo de una cierta cantidad nos permita especificar la tasa de variación por unidad de tiempo. Esta información da lugar, de manera natural, a una ecuación de recurrencia. Lo ilustramos en los siguientes dos ejemplos.

*(versión preliminar 28 de noviembre de 2011)*

EJEMPLO 6.1.18 *Sobre tipos de interés y préstamos.*

¿Sabe el lector realmente cómo se devuelve un préstamo o cómo se amortiza una hipoteca? La cuota mensual a la que nos comprometemos en un préstamo hipotecario se calcula con una cierta fórmula que depende de los parámetros del contrato (vencimiento, tipo de interés, etc.). ¿De dónde sale esa fórmula? Por si el lector no está ducho en la materia, empezaremos con una pequeña introducción a las nociones de tipo de interés y capitalización.

El **interés** es la cantidad que se percibe por un préstamo de dinero en un periodo de tiempo. Tras ese periodo de tiempo, una unidad de dinero, digamos un euro, se transforma en

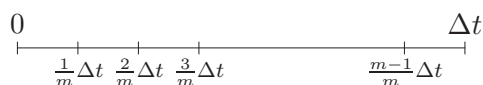
$$1 \longrightarrow 1 + I \quad (\text{capital} + \text{intereses}).$$

La cantidad  $I$  es el **tipo de interés**, el interés percibido por prestar una unidad de dinero<sup>10</sup>. Si partimos de, por ejemplo,  $M$  euros, tras el periodo de tiempo, se tendrán  $M(1 + I)$  euros.

Un método de **capitalización** es un contrato que prescribe unas reglas de pago de intereses sobre un capital dado. Para especificar un contrato de capitalización (compuesta) se requieren los siguientes datos:

- un periodo de tiempo  $\Delta t$  (normalmente, un año),
- un tipo de interés  $R$  (en tantos por uno) asociado a ese periodo de tiempo;
- y una frecuencia de capitalización  $m$  (generalmente, un divisor de 12 o incluso  $m = \infty$ ).

En un contrato como éste decimos que capitalizamos cada  $\Delta t/m$ . Por ejemplo, podríamos tener un contrato con un tipo de interés  $R$  anual y una frecuencia de capitalización mensual; esto correspondería a tomar  $\Delta t = 1$  año y  $m = 12$ . La regla de capitalización asociada a los tres datos del contrato significa que



- en tiempo 0, el capital es  $C$ .
- En tiempo  $\Delta t/m$ , el capital acumulado sería  $C \left(1 + \frac{R}{m}\right)$ , el correspondiente al interés producido por el tipo de interés (que está asociado a  $\Delta t$ ) durante ese periodo de tiempo.
- En tiempo  $2 \Delta t/m$ , el capital acumulado sería  $C \left(1 + \frac{R}{m}\right)^2$ , porque aplicamos la regla de interés al capital acumulado hasta el vencimiento anterior.
- Así calcularíamos el valor del capital en cada instante intermedio. En tiempo  $\Delta t$ , el valor del capital sería  $C \left(1 + \frac{R}{m}\right)^m$ , pues hemos efectuado  $m$  capitalizaciones sucesivas.
- La capitalización podría ir más allá. Por ejemplo, el capital en tiempo  $2 \Delta t = 2m (\Delta t)/m$  sería  $C \left(1 + \frac{R}{m}\right)^{2m}$ . En general, para tiempo  $t = k \frac{\Delta t}{m}$ , sería  $C \left(1 + \frac{R}{m}\right)^k$ .

**Amortización de un préstamo.** Pasemos al problema que nos interesa, el análisis de cómo se devuelve un préstamo. Un banco nos presta una cantidad  $V$  y tenemos  $N$  años para devolverla. Por supuesto, tendremos que pagar unos intereses, que siguen una regla de una composición mensual con tipo de interés anual  $R$ . Es decir, cada mes pagaremos un interés (que calcularemos con  $R$ ) por la cantidad de dinero que debamos en ese momento al banco; y además queremos ir devolviendo el capital prestado.

<sup>10</sup>Aquí estamos expresando el tipo de interés en tantos por uno, en lugar del quizás más habitual tanto por ciento. Haga el lector la conversión pertinente.

El método más habitual en los préstamos hipotecarios es el llamado **sistema francés**, en el que se paga una cantidad fija  $P$  cada mes. Queremos calcular cuál es el montante de ese pago mensual fijo. Llamemos  $D_n$  a la deuda que mantenemos con el banco tras  $n$  meses:

- En el instante inicial, debemos la cantidad total,  $D_0 = V$ .
- Tras el pago del primer mes,  $D_1 = V \left(1 + \frac{R}{12}\right) - P$ , porque se han acumulado unos intereses y hemos realizado un pago de  $P$ .
- Tras el segundo mes,  $D_2 = D_1 \left(1 + \frac{R}{12}\right) - P$ ; ahora acumulamos intereses sobre la deuda que manteníamos con el banco.
- En un mes cualquiera, la deuda con el banco será el resultado de restar a la deuda del mes anterior (más los intereses correspondientes) el pago fijo de  $P$ . Esto es,

$$D_n = D_{n-1} \left(1 + \frac{R}{12}\right) - P \quad \text{para cada } n \geq 1.$$

- Al terminar el contrato  $D_{12N} = 0$ .

Llamemos, por comodidad,  $a = 1 + R/12$ . Queremos resolver

$$\boxed{D_n = a D_{n-1} - P} \quad \text{para } n \geq 1, \quad \text{junto con la condición inicial } D_0 = V.$$

Disponemos además de la condición extra  $D_{12N} = 0$ , que como veremos nos permitirá obtener el valor de  $P$ . De nuevo resolvemos la ecuación de recurrencia por iteración:

$$\begin{aligned} D_n &= a D_{n-1} - P = a(a D_{n-2} - P) - P = a^2 D_{n-2} - aP - P = a^3 D_{n-3} - a^2 P - aP - P \\ &= \dots = a^n D_0 - P(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^2 + a^1 + 1) = a^n D_0 - P \frac{a^n - 1}{a - 1}, \end{aligned}$$

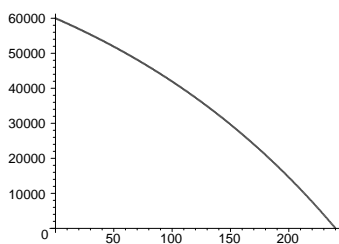
donde hemos utilizado la fórmula de la suma de una progresión geométrica finita. Como  $D_0 = V$  y  $a = 1 + R/12$ , tras unas cuantas manipulaciones llegamos a que

$$D_n = \frac{12}{R} P + \left(1 + \frac{R}{12}\right)^n \left[V - \frac{12}{R} P\right].$$

Utilizando que  $D_{12N} = 0$ , el lector podrá obtener que el valor de  $P$  es

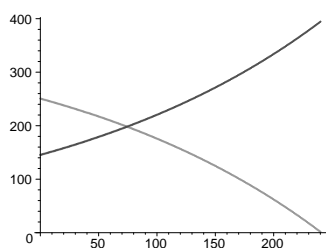
$$P = V \frac{R}{12} \left( \frac{1}{1 - (1 + R/12)^{-12N}} \right).$$

En cada mes, parte del pago  $P$  se destina al pago de los intereses, y otra parte a la amortización de capital. Estos repartos varían durante la vida del préstamo. Sea  $I_n$  la cantidad invertida en intereses y sea  $C_n$  la destinada a capital, de manera que  $P = I_n + C_n$ . En el mes  $n$  se pagan los intereses generados desde el último pago, esto es,  $I_n = D_{n-1} R/12$ .



Animamos al lector a que obtenga las expresiones explícitas de  $I_n$  y  $C_n$  a partir de las de  $D_n$  y  $P$ . Si, por ejemplo, el montante del préstamo es de  $V = 60000$  euros, se devuelve en  $n = 20$  años y el tipo de interés anual es  $R = 0.05$ , el pago mensual (fijo) resulta ser  $P = 395.97$  euros. La gráfica de la izquierda muestra cómo va disminuyendo la deuda con el banco a lo largo de los 240 meses de vida del préstamo.

(versión preliminar 28 de noviembre de 2011)



En esta segunda gráfica mostramos qué parte de la cuota se destina a intereses y qué parte a devolución de capital. Como es bien sabido, al principio pagamos sobre todo intereses. El lector podrá extraer conclusiones sobre la conveniencia de esa práctica, tan habitual, de cancelar el préstamo cuando está próximo al vencimiento. Los ejercicios 6.1.4 y 6.1.5 tratan otros sistemas de amortización de préstamos. ♣

#### EJEMPLO 6.1.19 *Cómo se administran medicamentos.*

Para tratar una cierta enfermedad tomamos una cantidad fija  $C$  de medicamento cada  $N$  horas. Buscamos un modelo matemático que permita determinar los valores de los parámetros  $C$  y  $N$  para que (1) la cantidad de medicamento en el organismo no supere nunca un cierto umbral de toxicidad  $B$ ; y (2) que esa cantidad de medicamento siempre esté por encima de un umbral de eficacia  $A$ , por debajo del cual el medicamento no surte efecto.

Tras cada  $N$  horas, sólo una fracción  $d$  (un número entre 0 y 1) de la cantidad de medicamento presente en el organismo se mantiene; el resto desaparece. Digamos que esta eliminación sigue un modelo de *decaimiento exponencial*: si en un cierto momento hay una cantidad  $D$  de medicamento, tras un tiempo  $t$  sólo quedará  $D e^{-kt}$ , donde  $k > 0$  es una cantidad (la constante de decaimiento) que dependerá de diversos factores y que supondremos conocida. Esto supone que, en realidad,  $d$  no es un nuevo parámetro, sino que está relacionado con  $N$  mediante  $d = e^{-kN}$ . Si  $N$  muy grande, es decir, las tomas están muy espaciadas, entonces  $d$  será muy cercano a 0, y casi todo el medicamento desaparecerá entre una toma y la siguiente. Vamos a suponer, por simplicidad, que el paso del medicamento al torrente sanguíneo es instantáneo. Las tomas se producen en tiempos  $t_0, t_1, t_2, \dots$ , separadas cada  $N$  horas. Llamaremos  $y_n$  e  $x_n$ , respectivamente, a las cantidades de fármaco en sangre *justo antes* e *inmediatamente después* de la toma de tiempo  $t_n$ . Los números  $y_n$  cumplen que

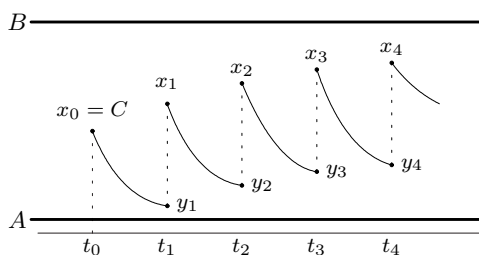
$$\boxed{y_n = d x_{n-1}} \quad \text{para cada } n \geq 1,$$

porque sólo se mantendrá una fracción  $d$  de la cantidad presente tras la toma anterior. Asimismo, se cumple que  $x_n = y_n + C$  para cada  $n \geq 1$  y, por tanto,

$$\boxed{x_n = d x_{n-1} + C},$$

ecuación que se resuelve por simple iteración (y utilizando que  $x_0 = C$ ). Dejamos al lector la comprobación de que las fórmulas correspondientes son

$$y_n = C \frac{d - d^{n+1}}{1 - d} \quad \text{y} \quad x_n = C \frac{1 - d^{n+1}}{1 - d} \quad \text{para cada } n \geq 1.$$



Queremos elegir valores de los parámetros  $C$  (cantidad en cada toma) y de  $N$  (periodo de tiempo entre tomas; recuérdese que fijar  $N$  equivale a especificar  $d$ ) de manera que, como se muestra a la izquierda, la cantidad de medicamento en sangre se mantenga siempre entre los dos límites  $A$  y  $B$  (por supuesto,  $C$  ha de estar ya en el rango adecuado).

(versión preliminar 28 de noviembre de 2011)

El asunto es más delicado de lo que pudiera parecer. Necesitamos que, para cada  $n$ ,

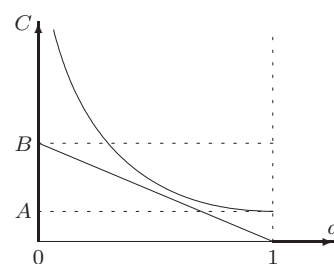
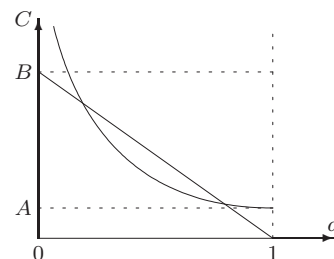
$$x_n = C \frac{1 - d^{n+1}}{1 - d} \leq B \quad \text{y que} \quad y_n = C \frac{d - d^{n+1}}{1 - d} \geq A.$$

Las sucesiones  $(x_n)$  e  $(y_n)$  son crecientes, pues  $d < 1$ . Así que tendremos lo de la derecha si el primer término  $y_1 = dC$  verifica la condición. Para la otra, será suficiente con exigir que se cumpla para el “último” de los  $x_n$ , esto es, para el  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , que vale  $C/(1 - d)$ . Así que debe cumplirse que

$$\frac{C}{1 - d} \leq B \quad \text{y} \quad dC \geq A \quad \implies \quad \frac{A}{d} \leq C \leq B(1 - d).$$

Y esto no es siempre posible. La región del plano  $(d, C)$  determinada por la doble desigualdad anterior es la encerrada entre las gráficas de  $A/d$  e  $B(1 - d)$ . . . ¡y esa región bien pudiera ser vacía! En los dibujos observamos las dos posibilidades: si  $B$  está cercano a  $A$ , el problema no tiene solución.

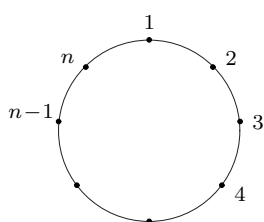
Un análisis más detallado, que dejamos como ejercicio 6.1.6 al lector, nos dice que tendremos toda una región de pares de valores  $(d, C)$  admisibles para el sistema siempre que<sup>11</sup>  $B \geq 4A$ . Lo que permite diseñar el protocolo, fijando el tiempo entre tomas o la cantidad de medicamento por toma. ♣



## 9. Una estrategia de supervivencia

Cerramos esta sección con un ejemplo, algo inclasificable, en el que aparecen muchas de las técnicas y argumentos que hemos visto hasta aquí.

EJEMPLO 6.1.20 *El problema de Josefo.*



El que vamos a explicar a continuación es, quizás, uno de los primeros problemas combinatorios de la Historia, una variación sobre el problema original que preocupaba a Flavio Josefo<sup>12</sup>. Tenemos  $n$  personas sentadas a una mesa circular y vamos eliminando a la **segunda** persona que nos vayamos encontrando en el sentido de las agujas del reloj (empezando a contar desde la primera posición), hasta que sólo una sobreviva. El desafío, por supuesto, es calcular la posición inicial, que llamaremos  $J(n)$ , que debe ocupar una persona si quiere sobrevivir.

<sup>11</sup>La *ratio* entre  $B$  y  $A$  depende del medicamento en cuestión, y en los casos reales puede llegar a ser de tan solo 2 a 1 (aquí estamos exigiendo 4 a 1). Aunque esta razón se puede reducir si nos damos un grado de libertad extra, como es el que la primera toma sea especial (y algo mayor, por ejemplo).

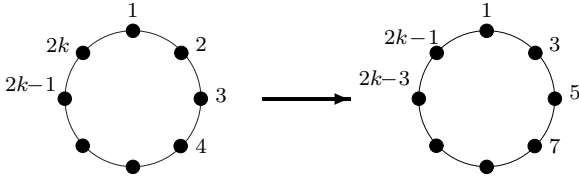
<sup>12</sup>El historiador judío Flavio Josefo (37-circa 100) participó en la revuelta contra Roma del año 66 y escapó a la matanza que tuvo lugar después de la toma de la ciudadela de Jospata. Se cuenta, quizás ya con un tono algo legendario, que 41 rebeldes fueron cercados por las tropas romanas y que, antes de ser capturados, optaron por el suicidio colectivo. Sólo Josefo y otro compañero no parecían muy convencidos de la utilidad del sacrificio, así que nuestro personaje propuso el siguiente sistema de inmolación: sentados a una mesa circular, se iría eliminando a cada tercera persona hasta que sólo dos sobrevivieran. Estos dos últimos deberían ser los últimos en morir. Josefo calculó las posiciones que debían ocupar él y un compañero para sobrevivir al proceso.

(versión preliminar 28 de noviembre de 2011)

Instamos al lector inquieto a que se entrene calculando a mano los primeros casos:

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
$J(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1	...

Obsérvese que todas las “posiciones de supervivencia” son impares (como corresponde a que en la primera pasada eliminamos todas las posiciones pares). La tabla parece sugerir un cierto patrón (de bloques diádicos) en esas posiciones de supervivencia.

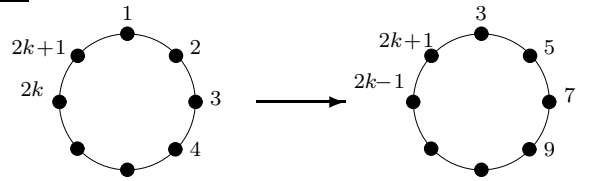


Empezamos con el caso par, con  $n = 2k$  personas. Queremos evaluar  $J(2k)$ . En la primera pasada eliminamos a los que ocupen posiciones pares, como se muestra en la figura. Queda una configuración con  $k$  personas,

aunque ahora no numeradas de 1 a  $k$ . Si estuvieran “bien” numeradas, la posición de supervivencia vendría dada directamente por  $J(k)$ . La posición 2 está ahora etiquetada con 3, la 3 con 5, la 4 con 7, la 5 con 9, etc. Esto es, hemos doblado cada posición y le hemos restado 1. Si  $m$  es la posición superviviente con el orden  $(1, 2, \dots, k)$  (de manera que  $m = J(k)$ ), con el nuevo etiquetado  $(1, 3, 5, \dots, 2k - 1)$  el superviviente será  $2m - 1$ . Así llegamos a que

$$(*) \quad \boxed{J(2k) = 2J(k) - 1}, \quad \text{para cada } k \geq 1.$$

El caso impar,  $n = 2k + 1$ , es análogo. La primera pasada elimina a las personas que ocupan posiciones pares; sobreviven  $k+1$  personas. La siguiente víctima es la que ocupaba la posición 1. Tras estos pasos, nos queda la configuración de la figura. Dejamos al lector que argumente como antes para concluir que



$$(**) \quad \boxed{J(2k + 1) = 2J(k) + 1} \quad \text{para cada } k \geq 1.$$

Las reglas  $(*)$  y  $(**)$ , junto con el valor  $J(1) = 1$ , permiten generar la sucesión  $(J(n))$ . Pero no está claro cómo obtener una fórmula explícita para  $J(n)$ , pues en cada paso hay que comprobar la paridad de los sucesivos valores que vamos encontrando. Aunque compruebe el lector que si  $n$  fuera una potencia de 2, digamos  $n = 2^m$ , entonces  $J(2^m) = 1$ .

Pero, ¿y si escribimos  $n$  en binario,  $n = (a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0)_2$ , donde los  $a_j \in \{0, 1\}$  y  $a_k = 1$ ? Si  $n$  es par (esto es, si  $a_0 = 0$ ), la relación  $(*)$  requiere calcular el número de Josefo en  $n/2$ , cuya expresión binaria es  $(a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1)_2$  (sólo hay que eliminar la última cifra del desarrollo binario). Por otro lado, si  $n$  es impar,  $(**)$  nos conduce a  $(n - 1)/2$ , cuya expresión en binario, como puede comprobar el lector, es también  $(a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1)_2$ .

En estos nuevos términos, la relación de recurrencia se simplifica notablemente:

$$J((a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0)_2) = 2J((a_k, a_{k-1}, \dots, a_1)_2) + (-1)^{a_0+1},$$

pues sumamos  $\pm 1$  dependiendo del valor de  $a_0$ . Iterando esta regla y utilizando que  $a_k = 1$ , el lector podrá llegar a que, si  $(a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0)_2$  es la expresión en binario de  $n$ , entonces

$$J((a_k, \dots, a_0)_2) = \sum_{j=0}^k (-1)^{a_j+1} 2^j.$$



(versión preliminar 28 de noviembre de 2011)

### EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 6.1

**6.1.1** Este ejercicio hace referencia a la sucesión de números de Leibniz ( $L(n)$ ) del ejemplo 6.1.14.

(a) Compruébese, recordando la discusión de la subsección 4.2.4, que  $\#\{k \leq n : \binom{n}{k} \text{ es impar}\} = 2^{L(n)}$ .

(b) Compruébese, por inducción, que si  $n \geq 0$ , entonces  $\sum_{k=0}^{2^n-1} 2^{L(k)} = 3^n$ .

**6.1.2** Sea  $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ ,  $n \geq 0$ .

(a) Compruébese que  $I_0 = e - 1$  y obténgase que  $I_n = e - nI_{n-1}$ , para cada  $n \geq 1$ .

(b) Para resolver la recurrencia anterior, consideramos los números  $J_n = (-1)^{n+1} I_n / (n! e)$ , para cada  $n \geq 0$ , que como podrá comprobar el lector, verifican que

$$J_n = J_{n-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \quad \text{para cada } n \geq 1.$$

Resuélvase esta recurrencia para obtener una fórmula para  $J_n$  y la correspondiente fórmula para  $I_n$ .

**6.1.3** Definamos  $H_n = \int_0^\infty e^{-t} \sin^n(t) dt$ . Compruébese que  $H_0 = 1$  y  $H_1 = 1/2$ , y que

$$H_n = \frac{n(n-1)}{1+n^2} H_{n-2}, \quad \text{para cada } n \geq 2.$$

Dedúzcanse las fórmulas para las integrales de índice par  $H_{2k}$  y las de índice impar  $H_{2k+1}$ .

**6.1.4** Este ejercicio y el siguiente utilizan los términos del ejemplo 6.1.18. En un sistema alternativo de amortización de préstamos, cada mes se paga una cantidad  $P_n$ , con la que se pagan los intereses  $I_n$  generados en el periodo anterior y se amortiza una cantidad fija  $C$  de capital:  $P_n = I_n + C$ , para  $n \geq 1$ . Ahora el pago mensual no es fijo, sino que va decreciendo con el tiempo.

(a) Obténgase una fórmula para  $D_n$ , la deuda con el banco en el mes  $n$ . Dedúzcase, de la condición  $D_{12N} = 0$ , el valor de  $C$ .

(b) Con estas expresiones, obténganse los valores de  $I_n$  y de  $P_n$ . Dibújese la gráfica de los pagos de intereses y capital para los datos  $R = 0,05$ ,  $N = 20$  años y  $V = 10$  millones de euros.

**6.1.5** Una tercera forma de amortización es el llamado **sistema americano**. Dados los datos  $R$ ,  $V$  y  $N$  como antes, se devuelve toda la deuda y sus intereses en un único pago al final del contrato. Esto es, se hace un pago en el mes  $12N$  de

$$P_{\text{final}} = V \left( 1 + \frac{R}{12} \right)^{12N}.$$

Para acumular ese capital se crea un fondo al que se contribuye con una cantidad fija  $P$  cada mes; este dinero se capitaliza mensualmente con un tipo de interés anual  $S$  (generalmente, distinto de  $R$ ). Se pide establecer una fórmula para  $A_n$ , el capital acumulado tras la aportación del mes  $n$ . Y, con la condición de que  $A_{12N} = P_{\text{final}}$ , obtener el valor de  $P$ .

**6.1.6** Estamos con el modelo de toma de medicamentos explicado en el ejemplo 6.1.19.

(a) Hállense los rangos de los parámetros  $d$  y  $C$  en los que mantendremos la cantidad de medicamento entre los límites  $A$  y  $B$ . Compruébese que si  $B \geq 4A$ , estos rangos realmente existen.

(versión preliminar 28 de noviembre de 2011)



(b) Supongamos que  $A = 3$  y  $B = 16$ . Determinéense los rangos para los parámetros  $d$  y  $C$ .

(c) Supongamos que el medicamento está caracterizado por un valor de  $k = 0, 1$ . Si  $C = 10$ , ¿qué rango para  $N$  sería posible? ¿y cuál sería el rango admisible para  $C$  si quisiéramos que  $N = 8$  horas?

**6.1.7** Estamos con el problema de Josefo del ejemplo 6.1.20. Supongamos que la expresión binaria de  $n$  es  $(a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0)_2$ , donde  $a_k = 1$ .

(a) Consideremos el número  $N$  cuya expresión en binario tiene la misma longitud que la de  $n$  y sus cifras son todo unos; esto es,  $N = \sum_{j=0}^k 2^j$ . Calcúlese  $2n - N$  y compruébese que coincide con  $J(n)$ .

(b) Dedúzcase de lo anterior que si escribimos  $n = 2^k + l$ , con  $0 \leq l < 2^k$ , entonces

$$J(2^k + l) = 2l + 1.$$

(c) Aplíquese esta fórmula al cálculo de  $J(134)$  y  $J(1356)$ .

(d) Dedúzcase que

$$J((a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0)_2) = (a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_1, a_0, a_k)_2,$$

de forma que podemos obtener  $J(n)$  sin más que permutar cíclicamente la expresión binaria de  $n$ .

(e) Ciertos números de Josefo cumplen que  $J(n) = n/2$ . Es el caso, por ejemplo, de 2, 10, 42, 170, etc. Caracterícense los números para los que esto ocurre.

**6.1.8** En el problema original de Josefo, se elimina a la tercera persona que vamos encontrando en el sentido de las agujas del reloj. Láncese sin miedo el lector a analizar esta cuestión para descubrir que, si  $n = 41$ , entonces las dos posiciones que sobreviven son la 16 (penúltimo) y la 31 (último).

**6.1.9** Consideremos una función  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ , donde  $\mathcal{X} = \{1, \dots, N\}$  ( $f$  no tiene por qué ser necesariamente una biyección, es decir, una permutación de  $\mathcal{X}$ ). Sea  $a_0 \in \mathcal{X}$ . Definimos  $a_1 = f(a_0)$ ,  $a_2 = f(a_1)$  y, en general,  $a_n = f(a_{n-1})$ . Compruébese que existe un  $n_0$  y un  $k$  tales que  $a_{n+k} = a_n$  para todo  $n \geq n_0$ .

**6.1.10** Analícense, a la luz del ejercicio anterior, los siguientes sistemas dinámicos para diversos valores de  $a_0$ :

(a) El conjunto  $\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, 6\}$  y la función  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ , donde  $f(n)$  es el resto de dividir  $3n$  por 7.

(b) Sea  $\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, 9999\}$ . La regla  $f$  es la siguiente: dado  $n \in \mathcal{X}$ , consideramos los números  $a$  (que tiene las mismas cifras que  $n$ , pero ordenadas de menor a mayor) y  $b$  (mismas cifras que  $n$ , pero de mayor a menor). Finalmente,  $f(n) = b - a$ . Por ejemplo, si  $n = 3075$ , entonces  $a = 0357$  y  $b = 7530$ , de manera que  $f(n) = 7173$ .

**6.1.11** Variamos el esquema de reproducción de Fibonacci del ejemplo 6.1.7 de la siguiente forma: los conejos tienen dos parejas de descendientes cuando tienen 2 meses, y tres parejas a partir del tercer mes de vida. Llamemos  $a_n$  al número de conejos que en el mes  $n$  tienen 3 meses de vida o más,  $b_n$  a los que tienen exactamente 2 meses y  $c_n$  a los de 1 mes. Suponemos que  $c_0 = 1$  y  $a_0 = b_0 = 0$ . Escribese una recurrencia (matricial) para  $(a_n, b_n, c_n)$ .

**6.1.12** Considérese la sucesión  $(u(n))_{n=1}^{\infty}$  de signos  $\pm 1$  dada por la siguiente regla:

$$u(2n) = u(n), \quad \text{para cada } n \geq 1 \quad \text{y} \quad u(2n+1) = (-1)^n, \quad \text{para cada } n \geq 0.$$

(a) Escribanse los primeros términos.

(b) Observemos que todo número natural  $n$  se puede escribir de manera única en la forma  $n = 2^r(2s+1)$ , con  $r \geq 0$  y  $s \geq 0$ , sin más que agrupar los factores de su desarrollo en primos. Compruébese que la regla de recurrencia anterior se puede escribir como sigue:

$$u(2^r(2s+1)) = (-1)^s.$$

(versión preliminar 28 de noviembre de 2011)

## 6.2. Resolución de ecuaciones de recurrencia lineales

Como el lector podrá imaginar, tras leer la sección anterior, la variedad de ecuaciones de recurrencia que se pueden plantear es inmensa. En la mayoría de las ocasiones, resolverlas es una tarea difícil. En esta sección nos vamos a limitar a estudiar algunos casos particulares, sobre todo las ecuaciones lineales y algunas que son variaciones sobre ellas. En el capítulo 12 resolveremos algunas más, ya con la ayuda de las funciones generatrices.

### 6.2.1. Ecuaciones lineales, homogéneas y con coeficientes constantes

En esta subsección nos interesaremos por las sucesiones  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  que son solución de ecuaciones como la siguiente:

$$(\star) \quad A_0 a_n + A_1 a_{n-1} + \cdots + A_k a_{n-k} = 0 \quad \text{para cada } n \geq k,$$

donde los  $A_0, A_1, \dots, A_{n-k}$  son ciertos números dados, con  $A_0, A_k \neq 0$ , y  $k \geq 1$ . Observemos que, de manera muy sintética, estamos representando infinitas condiciones para los términos de la sucesión, una para cada  $n$ . Sin pérdida alguna de generalidad, podemos suponer (dividiendo  $(\star)$  previamente por  $A_0$ ) que  $A_0 = 1$ , así que reescribiremos la ecuación de la siguiente forma:

$$(\star\star) \quad a_n = B_1 a_{n-1} + B_2 a_{n-2} + \cdots + B_k a_{n-k} \quad \text{para cada } n \geq k,$$

para insistir en que cada término de la sucesión (a partir de un cierto índice) se escribe como combinación **lineal** (con **coeficientes constantes**) de unos cuantos términos “anteriores”. Obsérvese cómo  $(\star\star)$  es una receta para calcular el término  $a_n$  si disponemos de los valores de  $a_{n-1}, \dots, a_{n-k}$ . La **homogeneidad** a la que nos referimos en el título de la subsección quiere decir que no aparecen términos extra que no dependan de los propios  $a_j$ . Esto resulta ser fundamental en el análisis que vamos a hacer. En la subsección 6.2.2 veremos cómo podemos tratar el caso en que aparezcan términos no homogéneos.

El número de términos anteriores involucrados será el **grado** de la ecuación (la que hemos escrito arriba será de grado  $k$ ). Necesitaremos, además,  $k$  condiciones iniciales para que la sucesión “arranque”; en el caso de arriba, los números  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ , los primeros  $k$  términos de la sucesión. A partir de ellos, y aplicando  $(\star\star)$  reiteradamente, obtendremos todos los valores de  $(a_n)$ . De todos los que hemos visto en la primera sección de este capítulo, sólo los ejemplos 6.1.1, 6.1.5, 6.1.6, 6.1.7 y 6.1.9 son de este tipo (aunque los ejemplos 6.1.2, 6.1.3, 6.1.18 y 6.1.19 conducían también a ecuaciones lineales con términos no homogéneos, que trataremos en la subsección 6.2.2).

El caso  $k = 1$ , la **ecuación de primer grado**, es especialmente sencillo, pues para resolverla basta aplicar reiteradamente<sup>13</sup> la regla hasta llegar al valor inicial. Así, si la ecuación es  $a_n = B_1 a_{n-1}$ , para cada  $n \geq 1$ , y el valor inicial es  $a_0$ , entonces la solución es  $a_n = B_1^n a_0$  para cada  $n \geq 0$  (véanse algunas variaciones en el ejercicio 6.2.1).

<sup>13</sup>Como ya hemos hecho en varias ocasiones, incluso permitiendo la presencia de un término extra constante (ejemplos 6.1.3, 6.1.18 y 6.1.19). En realidad podemos “resolver” cualquier ecuación del tipo  $x_n = f(n)x_{n-1} + g(n)$ , donde  $f(n)$  y  $g(n)$  son ciertas funciones, por simple iteración. Aunque, como imaginará el lector, excepto en algunos casos especialmente sencillos (véase el ejemplo 6.1.4), las fórmulas que se obtienen son inmanejables.

Así que podemos restringir nuestro estudio al caso  $k \geq 2$ . Y, de hecho, los ingredientes del análisis general que vamos a desarrollar están ya presentes en el caso de la **ecuación lineal homogénea de segundo orden**, a la que añadimos dos condiciones iniciales:

$$\begin{cases} (*) & \boxed{a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}} & \text{para cada } n \geq 2; \\ & a_0 = p, \quad a_1 = q. \end{cases}$$

Los datos son  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p$  y  $q$ , y el objetivo es obtener una fórmula para  $a_n$  en términos de  $n$ . Aunque conviene recordar que no siempre la fórmula cerrada para la solución es la manera más eficaz de calcular los valores de la sucesión (la ecuación de recurrencia podría ser un mejor método). El interés por obtener una tal fórmula está justificado, además de quizás por razones “estéticas”, por que en muchas ocasiones nos permite entender el comportamiento de los  $a_n$  (por ejemplo, para  $n$  grande) en términos de ciertas cantidades que en un primer vistazo podrían pasar inadvertidas.

Una **solución** de la ecuación (\*) es una sucesión  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  cuyos términos (a partir de  $a_2$ ) verifiquen la ecuación. La sucesión será solución del problema completo cuando, además, los dos primeros términos,  $a_0$  y  $a_1$ , valgan  $p$  y  $q$  respectivamente. Observe el lector que la ecuación tiene, en principio, infinitas soluciones (una por cada posible elección de valores iniciales  $a_0$  y  $a_1$ ), pues basta arrancar la sucesión a partir de ese par de valores iniciales (por “arrancar” la sucesión entenderemos fijar dos valores iniciales para  $a_0$  y  $a_1$  y luego utilizar la ecuación (\*) para ir obteniendo sucesivamente  $a_2, a_3, a_4 \dots$ ). Pero sólo una de estas sucesiones es, además, solución del problema completo (justamente aquélla para la que  $a_0 = p$  y  $a_1 = q$ )<sup>14</sup>.

### A. Estructura de las soluciones de la ecuación

La estructura de las (infinitas) soluciones de la ecuación (\*) es especialmente interesante. Obsérvese que ser solución de la ecuación nada dice sobre los valores que pudieran tener los dos primeros términos. Todo se debe a las siguientes dos propiedades:

1. Si  $(a_n)$  y  $(b_n)$  son dos soluciones de (\*), entonces la sucesión  $(c_n)$  definida mediante  $c_n = a_n + b_n$  para cada  $n \geq 0$  también lo es, puesto que, para cada  $n \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} c_n = a_n + b_n &= \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} + \alpha b_{n-1} + \beta b_{n-2} = \alpha (a_{n-1} + b_{n-1}) + \beta (a_{n-2} + b_{n-2}) \\ &= \alpha c_{n-1} + \beta c_{n-2}. \end{aligned}$$

2. Análogamente, si  $(a_n)$  es solución de (\*) y  $r$  es un cierto número real fijo, entonces la sucesión  $(c_n)$  definida a través de  $c_n = r a_n$  para cada  $n$  también es solución de (\*).

Así que el conjunto de soluciones de (\*) no es cualquier cosa, sino que tiene estructura, en concreto la de **espacio vectorial**<sup>15</sup>: la *combinación lineal* de sucesiones que sean solución de (\*) es una sucesión que sigue siendo solución.

<sup>14</sup>Animamos al lector interesado a que pruebe, utilizando el principio de inducción fuerte, que si dos sucesiones  $(a_n)$  y  $(b_n)$  son solución de (\*) y se cumple que  $a_0 = b_0$  y  $a_1 = b_1$ , entonces  $a_n = b_n$  para todo  $n$ . Obsérvese que los dos términos que coinciden deben ser consecutivos para que funcione el argumento.

<sup>15</sup>El lector avisado sabrá identificar los conceptos de base y dimensión que aparecerán implícitamente en nuestros argumentos. Si además está versado en la teoría de resolución de ecuaciones diferenciales, muchas de las técnicas que aparecerán en esta sección le resultarán familiares.

Esta observación tiene consecuencias muy relevantes. Digamos que  $(a_n)$  y  $(b_n)$  son dos soluciones distintas de la ecuación (con más precisión, deben ser *linealmente independientes*, lo que en este caso sólo supone que no deben ser una múltiplo de la otra). Por simplificar el argumento, supongamos que son  $(a_n) = (0, 1, \dots)$ , la solución que empieza con 0 y 1, y  $(b_n) = (1, 0, \dots)$ , la que empieza con 1 y 0.

Ahora consideremos otra solución cualquiera de la ecuación, digamos  $(c_n) = (c_0, c_1, c_2, \dots)$ . Formamos la sucesión  $(d_n)$  definida mediante

$$d_n = c_1 a_n + c_0 b_n \quad \text{para cada } n.$$

Ya sabemos que  $(d_n)$  es solución de la ecuación, pues es una combinación lineal de soluciones. Pero, además, sus dos primeros términos coinciden con los de  $(c_n)$ . Así que ambas sucesiones,  $(c_n)$  y  $(d_n)$ , han de ser la misma.

Si el lector se anima a rehacer el argumento anterior con dos sucesiones  $(a_n)$  y  $(b_n)$  generales, como pedimos hacer en el ejercicio 6.2.2, llegará a la conclusión de que, si encontramos dos soluciones “distintas” (linealmente independientes), *cualquier otra* solución de la ecuación se puede escribir como combinación lineal de ellas.

## B. Forma de las soluciones de la ecuación

Pues ya está, ¿no? Tomamos dos soluciones de la ecuación, por ejemplo dos tan sencillas como las que empiezan, respectivamente, por  $(0, 1, \dots)$  y por  $(1, 0, \dots)$ . Aplicando reiteradamente la ecuación, descubrimos que los primeros términos de estas sucesiones son

$$\begin{array}{r|l|l|l|l|l|l} (a_n) \longrightarrow & 0 & 1 & \alpha & \alpha^2 + \beta & \alpha^3 + 2\alpha\beta & \alpha^4 + 3\alpha^2\beta + \beta^2 & \dots \\ (b_n) \longrightarrow & 1 & 0 & \beta & \alpha\beta & \alpha^2\beta + \beta^2 & \alpha^3\beta + 2\alpha\beta^2 & \dots \end{array}$$

Y cualquier otra solución de la ecuación se escribirá como combinación lineal de estas dos: su término general será de la forma

$$c_n = Aa_n + Bb_n,$$

donde  $A$  y  $B$  son dos ciertas constantes (que en realidad quedarán determinadas en cuanto fijemos las condiciones iniciales).

Pero no, éste no es el final de la historia, porque no parece posible que de la expresión anterior podamos extraer una fórmula cerrada y manejable en función del índice  $n$  para el término general de una solución cualquiera.

Será, quizás, que no estamos eligiendo bien las dos soluciones “especiales”. Recordemos que la única restricción es que han de ser sucesiones que verifiquen la ecuación y que sean “distintas” (linealmente independientes). Pero parece razonable buscar soluciones con cierta estructura.

Podríamos, por ejemplo, buscar soluciones cuyos términos estén en progresión aritmética. Fijamos entonces un primer término  $a_0$  y exigimos que el siguiente sea de la forma  $a_1 = a_0 + d$ . El parámetro  $d$  está a nuestra disposición. La ecuación de recurrencia nos dice que el tercer término ha de ser  $a_2 = \alpha(a_0 + d) + \beta a_0$  y buscamos un valor de  $d$  para el que ese término sea el siguiente en la progresión, esto es,  $a_0 + 2d$ . Enseguida nos damos cuenta de que no vamos por buen camino.

(versión preliminar 28 de noviembre de 2011)

Sin desanimarnos, lo volvemos a intentar, pero ahora con términos que estén en progresión geométrica. Empezamos, por ejemplo, con  $(1, r, \dots)$ . Los siguientes términos son

$$(1, r, \alpha r + \beta, \alpha(\alpha r + \beta) + \beta r, \dots).$$

Ahora ajustamos  $r$  para que el tercer término esté en progresión geométrica con los anteriores; esto es,  $r$  ha de cumplir que

$$\alpha r + \beta = r^2.$$

Vamos con el cuarto término. Querriamos que  $\alpha(\alpha r + \beta) + \beta r = r^3$ . Pero obsérvese que

$$\alpha \underbrace{(\alpha r + \beta)}_{=r^2} + \beta r = \alpha r^2 + \beta r = r \underbrace{(\alpha r + \beta)}_{=r^2} = r^3.$$

¡Oooh! (de asombro): sale gratis. El *mismo valor* de  $r$  que nos permite ajustar el tercer término consigue hacerlo con el cuarto. El lector podrá comprobar que lo mismo ocurre para los siguientes. Así que existe una solución de la ecuación de la forma  $a_n = r^n$  (recuérdese que esto ya ocurría en las ecuaciones de primer grado), una fórmula de lo más sencilla. Además, la ecuación de segundo grado que define el valor de  $r$  adecuado puede tener otra solución, que nos permitiría construir otra sucesión, también con términos en progresión geométrica, con la que completar el análisis del problema.

### C. Método de resolución del problema completo

Ya estamos en condiciones de resumir y formalizar estas ideas. Buscamos soluciones  $(a_n)$  de la ecuación (\*) cuyos términos estén en progresión geométrica; es decir, que sean de la forma  $a_n = r^n$ , para todo  $n \geq 0$ , donde  $r$  es un cierto número no nulo que determinaremos en un momento. El que sea solución exige que

$$r^n = \alpha r^{n-1} + \beta r^{n-2} \quad \text{para cada } n \geq 2.$$

Pero estas infinitas condiciones se resumen, en realidad, dividiendo por  $r^{n-2}$ , en una sola,

$$\boxed{r^2 = \alpha r + \beta}$$

(el lector que haya estudiado el ejemplo 6.1.7 encontrará familiar este argumento). A la ecuación algebraica así obtenida se le llama **ecuación característica**. El análisis dependerá de qué tipo de soluciones tenga esta ecuación de segundo grado.

#### Caso 1. La ecuación característica tiene dos raíces reales distintas

Llamemos  $r_1$  y  $r_2$  a estas dos raíces. Sabemos que las sucesiones definidas por  $a_n = r_1^n$  y  $b_n = r_2^n$  son soluciones de (\*). Son además, distintas (linealmente independientes), porque  $r_1 \neq r_2$ . Así que cualquier otra solución se escribirá como combinación lineal de ellas. Es decir, podemos escribir la solución general de (\*) como

$$\boxed{(A r_1^n + B r_2^n)}$$

donde  $A$  y  $B$  son dos constantes cualesquiera. Ahora buscamos la (única) solución que verifica las dos condiciones iniciales, para lo que bastará determinar los valores de  $A$  y  $B$  adecuados mediante sencillas relaciones algebraicas. Lo vemos en un ejemplo.

(versión preliminar 28 de noviembre de 2011)

EJEMPLO 6.2.1 Consideremos la sucesión de números de Fibonacci ( $F_n$ ) dada por  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  y  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  para cada  $n \geq 2$ .

La ecuación característica correspondiente es  $r^2 - r - 1 = 0$ , cuyas soluciones son, como ya sabemos,  $r_1 = (1 + \sqrt{5})/2$  y  $r_2 = (1 - \sqrt{5})/2$ ; así que la solución general de la ecuación de Fibonacci es

$$A \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + B \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

En esta fórmula tenemos codificadas todas las soluciones de la ecuación de Fibonacci. Queda determinar los valores de  $A$  y  $B$  que corresponden a la sucesión que nos incumbe, la que tiene como valores iniciales 0 y 1. Sólo hay que escribir los casos  $n = 0$  y  $n = 1$  de la fórmula y resolver el sistema de ecuaciones correspondiente:

$$\left. \begin{array}{l} 0 = F_0 = A + B \\ 1 = F_1 = A \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + B \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \end{array} \right\} \implies A = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{y} \quad B = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

De manera que el  $n$ -ésimo número de Fibonacci se puede escribir como

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

la llamada **fórmula de Binet**, de 1843 (aunque parece que Daniel Bernoulli y Euler ya la conocían hacia 1724). Pasan cinco siglos desde que Fibonacci se interesara por estos números hasta que se obtiene esta expresión. Nada menos que cinco siglos separan las simples manipulaciones con la ecuación del nivel de abstracción que supone el análisis que aquí hemos hecho y que nos ha conducido a esta fórmula.

Fórmula, por cierto, algo sorprendente; obsérvese que los distintos términos, que involucran raíces de 5, se combinan mágicamente para dar siempre un entero. Quizás no sea la manera más eficaz de calcular el valor de un cierto  $F_n$ , pero descubre, o más bien hace explícita, la relación entre estos números de Fibonacci y  $\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , la razón áurea. Compruebe el lector que la fórmula se puede reescribir como

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \tau^n - \left( -\frac{1}{\tau} \right)^n \right).$$

Además, como  $\tau > 1$ , el segundo sumando se hace muy pequeño cuando  $n$  es grande, de manera que  $F_n \rightarrow \tau^n / \sqrt{5}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Lo que demuestra el resultado que vimos en el ejemplo 6.1.7 sobre el comportamiento asintótico de las razones entre números de Fibonacci consecutivos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \tau.$$

Más aún, como  $\sqrt{5} > 2$ ,

$$\left| \frac{1}{\sqrt{5}} \left( -\frac{1}{\tau} \right)^n \right| < \frac{1}{2} \quad \text{para cada } n \geq 0.$$

Así que  $F_n$  es el entero más próximo a  $\tau^n / \sqrt{5}$ . Si  $n$  es par,  $F_n$  estará ligeramente por encima de  $\tau^n / \sqrt{5}$ ; y si  $n$  es impar, ligeramente por debajo. ♣

(versión preliminar 28 de noviembre de 2011)

**Caso 2. La ecuación característica tiene una raíz real doble**

La ecuación característica  $r^2 - \alpha r - \beta = 0$  tiene una única raíz (doble)  $r_1$  sólo si los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  son muy especiales. En concreto, con la ayuda de la fórmula cuadrática (el radicando  $\alpha^2 + 4\beta$  ha de ser 0), obtenemos que tienen que ser de la forma  $\alpha = 2r_1$  y  $\beta = -r_1^2$ .

La ecuación de recurrencia con la que estamos es, pues,

$$a_n = 2r_1 a_{n-1} - r_1^2 a_{n-2}, \quad \text{para cada } n \geq 2.$$

Sabemos que  $(a_n) = (1, r_1, r_1^2, r_1^3, \dots)$  es una solución de la ecuación, pero falta otra. No queremos que sea un múltiplo de ésta, y parece razonable suponer que ha de depender de  $r_1$ . Podríamos intentarlo con la sucesión  $(b_n)$ , que empieza con  $(0, r_1, \dots)$  y que cumple las condiciones requeridas. Miremos el aspecto de sus primeros términos:

$$\begin{aligned} b_2 &= 2r_1 b_1 - r_1^2 b_0 = 2r_1^2, \\ b_3 &= 2r_1 b_2 - r_1^2 b_1 = 4r_1^3 - r_1^3 = 3r_1^3, \\ b_4 &= 2r_1 b_3 - r_1^2 b_2 = 6r_1^4 - 2r_1^4 = 4r_1^4. \end{aligned}$$

De lo más atractivo (y sorprendente): las sucesivas cancelaciones hacen que los términos de la sucesión sean de la forma  $n r_1^n$ , para cada  $n \geq 0$ , de nuevo una fórmula sencilla y manejable. El lector puede comprobar más formalmente que, efectivamente, si  $r_1$  es una raíz doble de la ecuación característica, entonces la sucesión dada por  $b_n = n r_1^n$  para cada  $n$  es una solución de la ecuación de recurrencia. Así que la solución general se puede escribir como

$$\boxed{(A r_1^n + B n r_1^n)}$$

De nuevo, los valores de  $A$  y  $B$  se determinarán con las condiciones iniciales.

Por supuesto, había una razón, además de las heurísticas que hemos expuesto aquí, para elegir la forma particular de esta segunda solución (véase el ejercicio 6.2.3). No hay tal *Deus ex machina*, al que a veces somos tan aficionados en los textos de Matemáticas.

**EJEMPLO 6.2.2 La ruina del jugador, revisada.**

En el ejemplo 6.1.9 presentábamos los ingredientes del problema: empezamos a jugar con  $n$  euros, donde  $0 \leq n \leq N$ , para cierto  $N$  fijo. En cada partida ganamos con probabilidad  $p$  y perdemos con probabilidad  $q = 1 - p$ . Si  $a(n)$  es la probabilidad de arruinarnos, entonces

$$a(n+2) = \frac{1}{p} a(n+1) - \frac{q}{p} a(n), \quad \text{si } 0 \leq n \leq N-2.$$

Las condiciones “iniciales”, un tanto inusuales, son  $a(0) = 1$  y  $a(N) = 0$ . La ecuación característica es, en este caso,

$$r^2 - \frac{1}{p} r + \frac{q}{p} = 0,$$

cuyas soluciones son  $r_1 = q/p$  y  $r_2 = 1$ . Llamemos, por comodidad,  $\delta$  al cociente  $q/p$ . Hay dos casos, dependiendo de si  $\delta = 1$  ó no.

(versión preliminar 28 de noviembre de 2011)

**Caso  $p \neq q$**  (es decir,  $\delta \neq 1$ ). Obsérvese que, en cada partida, la probabilidad de ganar no es la misma que la de perder. Si estuviéramos hablando de una moneda, diríamos que está “cargada”. Cuando jugamos a la ruleta, apostando al rojo o al negro, estamos en este caso, como luego explicaremos (de hecho, en el caso en que la probabilidad de ganar  $p$  es menor que la de perder  $q$ , como el lector se habrá imaginado ya).

Como las raíces de la ecuación característica son distintas, la solución general será

$$a(n) = A 1^n + B \delta^n.$$

Ahora, con ayuda de las condiciones iniciales, determinamos  $A$  y  $B$ :

$$\left. \begin{array}{l} a(0) = A + B = 1 \\ a(N) = A + B \delta^N = 0 \end{array} \right\} \implies A = -\frac{\delta^N}{1 - \delta^N} \quad \text{y} \quad B = \frac{1}{1 - \delta^N},$$

con lo que la solución es

$$a(n) = -\frac{\delta^N}{1 - \delta^N} + \frac{1}{1 - \delta^N} \delta^n, \quad (\text{donde, recordemos, } \delta = q/p).$$

**Caso  $p = q = 1/2$**  Ahora hay una única raíz de la ecuación característica,  $r_1 = r_2 = 1$ , y la solución general se puede escribir como

$$a(n) = A 1^n + B n 1^n = A + Bn.$$

De las condiciones iniciales obtenemos que  $A = 1$  y  $B = -1/N$ , con lo que

$$a(n) = 1 - \frac{n}{N}.$$

El comportamiento de las dos soluciones es bien diferente: en el caso  $p = q$ , es una función lineal de  $n$ , mientras que en el otro es una función exponencial.

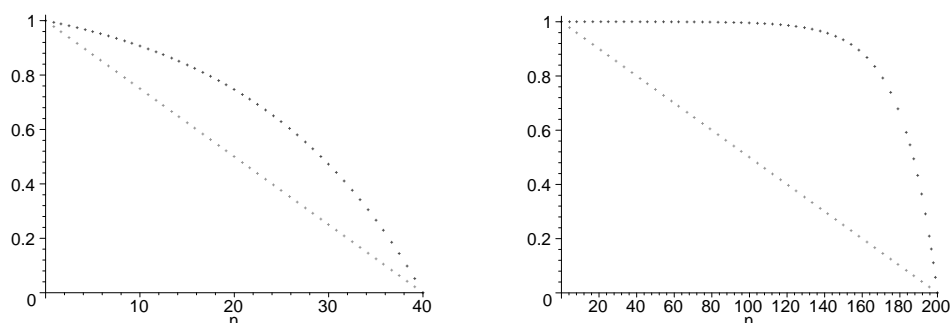
Para entender realmente qué supone esto, supongamos que estamos en un casino europeo apostando al rojo: de los 36 números, hay 18 rojos y otros 18 negros. Pero hay también una casilla, la del 0, que no lleva color; si sale el 0, la banca se lleva todas las apuestas. Parece poco negocio para el casino, pero... La probabilidad de ganar es  $p = 18/37$ , mientras que la de perder es  $q = 19/37$ , ligeramente superior, debido a la presencia de esta casilla extra con el 0. El cociente  $\delta = q/p$  vale 1,0555. *Prácticamente 1, pero no exactamente 1.*

Las gráficas que aparecen a continuación comparan los valores de  $a(n)$  en el rango  $0 \leq n \leq N$  con  $\delta = 1$  y  $\delta = 1,0555$ . Marcamos en el eje horizontal los posibles valores de  $n$ , nuestra fortuna inicial, y en el eje vertical los correspondientes de  $a(n)$ , la probabilidad de arruinarse cuando empezamos a jugar con  $n$  euros.

Con  $\delta = 1$ , claro, tenemos una recta. Pero la gráfica para  $\delta = 1,0555$  es bien diferente. A la izquierda representamos el caso en que  $N = 40$ , en el que ya se aprecia una cierta diferencia entre ambas gráficas. La de la derecha corresponde a  $N = 200$ , y la discrepancia es ya espectacular.

(versión preliminar 28 de noviembre de 2011)





Obsérvese que, en la gráfica de la derecha, la probabilidad de arruinarse es prácticamente 1 (en el caso  $\delta = 1,0555$ ) a menos que  $n$  esté muy, pero que muy cercano a  $N = 200$ . Digamos que estamos jugando a “doblar o arruinarse”. Es decir, partimos de una fortuna  $n$  que es la mitad de  $N$  ( $N = 2n$ ). Si el juego es equilibrado ( $\delta = 1$ ), la probabilidad de arruinarse es siempre un  $1/2$ , sea cual sea  $N$ . Pero en la ruleta ( $\delta = 1,0555$ ), para  $N = 40$  tenemos una probabilidad de ruina de casi el 70%. . . y si estamos con  $N = 200$ , nos arruinaremos en más del 98% de las ocasiones. Las conclusiones quedan para el lector. ♣

### Caso 3. La ecuación característica tiene dos raíces complejas

La ecuación característica tiene coeficientes reales, así que sabemos<sup>16</sup> que las dos raíces complejas son conjugadas una de la otra. Digamos que son  $z_1 = a + bi$  y  $z_2 = \bar{z}_1 = a - bi$ . El lector puede comprobar que las sucesiones  $(a_n)$  y  $(b_n)$  definidas, para cada  $n$ , mediante  $a_n = z_1^n$  y  $b_n = z_2^n$  respectivamente, son soluciones de la ecuación de recurrencia, así que su solución general se puede escribir como

$$(A z_1^n + B z_2^n) = (A z_1^n + B \bar{z}_1^n),$$

donde  $A$  y  $B$ , como siempre, se determinan con las condiciones iniciales.

Pero todo en este problema, los coeficientes de la ecuación y los propios términos de la sucesión, son números reales. Y obtenemos una solución escrita en términos de números complejos. Pese a la advertencia de Hadamard (véase la página 22), puede que esto no nos deje muy satisfechos. . .

Así que intentaremos encontrar otro par de soluciones, que cumplan las condiciones habituales, cuyos términos sean números reales y de manera que la fórmula que obtengamos siga siendo razonable. Nuestras soluciones especiales empiezan con

$$(a_n) = (1, z_1, \dots) \quad \text{y} \quad (b_n) = (1, \bar{z}_1, \dots).$$

Pasamos a la forma polar: escribimos  $z_1 = r e^{i\theta}$  y  $\bar{z}_1 = r e^{-i\theta}$ , donde  $r = |z_1|$  y  $\theta = \arg(z_1)$ . Con la casi mágica fórmula de Euler-De Moivre de la página 28, comprobamos que  $z_1^n = r^n e^{in\theta}$  y  $\bar{z}_1^n = r^n e^{-in\theta}$ . Así que, para cualquier  $n$ ,  $z_1^n$  y  $\bar{z}_1^n$  son uno el conjugado complejo del otro. Por lo tanto,  $z_1^n + \bar{z}_1^n$  es un número real, mientras que  $z_1^n - \bar{z}_1^n$  es un número imaginario puro.

<sup>16</sup>En el caso de la ecuación de segundo grado es obvio. Para ecuaciones de mayor grado, ya vimos el argumento en la demostración de la proposición 4.48.

Esto nos sugiere definir dos nuevas sucesiones  $(\tilde{a}_n)$  y  $(\tilde{b}_n)$  mediante

$$\tilde{a}_n = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{y} \quad \tilde{b}_n = \frac{a_n - b_n}{2i} \quad (\text{para cada } n \geq 0)$$

cuyos primeros términos resultan ser

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n &= \left( \frac{1+1}{2}, \frac{z_1 + \bar{z}_1}{2}, \dots \right) = (1, \operatorname{Re}(z_1), \dots) \\ \tilde{b}_n &= \left( \frac{1-1}{2i}, \frac{z_1 - \bar{z}_1}{2i}, \dots \right) = (0, \operatorname{Im}(z_1), \dots) \end{aligned}$$

Pero más aún, los términos generales se pueden escribir de manera muy sencilla:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n &= \frac{z_1^n + \bar{z}_1^n}{2} = r^n \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} = r^n \cos(n\theta), \\ \tilde{b}_n &= \frac{z_1^n - \bar{z}_1^n}{2i} = r^n \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} = r^n \sin(n\theta). \end{aligned}$$

Perfecto: todos los términos son reales, y la fórmula es sencilla. Así que podemos utilizar, para describir la solución general de la ecuación, la expresión

$$\boxed{\left( C r^n \cos(n\theta) + D r^n \sin(n\theta) \right)_{n=0}^{\infty}}$$

donde, recordemos,  $r = |z_1|$  y  $\theta = \arg(z_1)$  y  $z_1$  es una de las raíces complejas de la ecuación característica.

**EJEMPLO 6.2.3** Queremos encontrar la sucesión de números  $(a_n)$  definidos por

$$a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}, \quad \text{para cada } n \geq 2,$$

junto con las condiciones iniciales  $a_0 = 1$  y  $a_1 = 1$ .

De la ecuación característica  $r^2 - 2r + 2 = 0$  obtenemos raíces

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{y} \quad z_2 = \bar{z}_1 = 1 - i = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

La solución general de la ecuación se puede escribir como

$$\left( A(1+i)^n + B(1-i)^n \right)_{n=0}^{\infty}.$$

Pero también con la siguiente expresión alternativa:

$$\left( 2^{n/2} \left[ C \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + D \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) \right] \right)_{n=0}^{\infty}.$$

Con las condiciones iniciales determinamos que  $C = 1$  y que  $D = 0$ , así que la respuesta buscada es, para cada  $n \geq 0$ ,

$$a_n = 2^{n/2} \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right).$$

Compruébese que, a pesar de escribirse de esta forma algo extravagante, los términos de la sucesión son todos enteros. ♣

(versión preliminar 28 de noviembre de 2011)

Todos los argumentos que hemos desarrollado hasta aquí para el caso de la ecuación de segundo grado se aplican, *mutatis mutandis*, a las ecuaciones lineales, homogéneas y con coeficientes constantes de grado  $k$ . Dejamos al lector que reconstruya la teoría para el caso general, y nos limitamos a exponer el resultado básico, así como a ilustrarlo con un ejemplo.

**Teorema 6.1** Dado  $k \geq 1$ , la solución general de la ecuación

$$a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \alpha_2 a_{n-2} + \cdots + \alpha_k a_{n-k}$$

se puede escribir de la forma

$$\left( P_1(n) r_1^n + P_2(n) r_2^n + \cdots + P_s(n) r_s^n \right)_{n=0}^{\infty},$$

donde  $r_1, r_2, \dots, r_s$  son las raíces distintas (reales o complejas) de la ecuación característica

$$r^k = \alpha_1 r^{k-1} + \alpha_2 r^{k-2} + \cdots + \alpha_{k-1} r + \alpha_k$$

y cada  $P_i(n)$  es un polinomio genérico (con coeficientes arbitrarios) de grado igual a la multiplicidad de la correspondiente raíz  $r_i$  menos uno.

**EJEMPLO 6.2.4** Consideremos la ecuación  $a_n = 4a_{n-1} - 6a_{n-2} + 6a_{n-3} - 5a_{n-4} + 2a_{n-5}$ , para cada  $n \geq 5$ , junto con las condiciones iniciales  $a(0) = a(1) = a(2) = a(3) = 0$  y  $a(4) = 1$ .

Las raíces de la ecuación característica (una quintica)

$$r^5 = 4r^4 - 6r^3 + 6r^2 - 5r + 2,$$

son los números 2, 1 (raíz doble),  $i$  y  $-i$  (dos raíces complejas conjugadas, como debe ser). Así que, conforme al teorema anterior, la solución general de la ecuación de recurrencia se puede escribir como

$$\left( (A_1 + A_2 n) 1^n + A_3 2^n + A_4 i^n + A_5 (-i)^n \right)_{n=0}^{\infty}.$$

O, si queremos evitar la presencia de números complejos, como

$$\left( (B_1 + B_2 n) 1^n + B_3 2^n + B_4 1^n \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + B_5 1^n \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \right)_{n=0}^{\infty}.$$

Si ahora imponemos las cinco condiciones iniciales, obtendremos un sistema de cinco ecuaciones de las que podemos determinar los valores de los números  $B_1, \dots, B_5$ . Dejamos al lector la comprobación (algo tediosa) de que la solución del problema es la sucesión dada por

$$a_n = \frac{1}{5} 2^n - \frac{1}{2} n + \left( -\frac{1}{10} + \frac{1}{20} i \right) [(-i)^n - i^n] \quad \text{para cada } n \geq 0,$$

o bien

$$a_n = -\frac{1}{2} n + \frac{1}{5} 2^n - \frac{1}{5} \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \frac{1}{10} \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right).$$

Ambas fórmulas, pese a su alambicada escritura, representan a la sucesión de números (enteros) cuyos primeros términos son

$$(0, 0, 0, 0, 1, 4, 10, 22, 47, 98, 200, 404, 813, 1632, 3270, \dots)$$

El lector podrá deducir, a partir de la fórmula anterior, que  $a_n \sim 2^n/5$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . ♣

(versión preliminar 28 de noviembre de 2011)

### 6.2.2. Ecuaciones lineales, no homogéneas y con coeficientes constantes

Consideramos ahora un caso más general, en el que la ecuación contiene un término extra que depende del índice  $n$ :

$$a_n + B_1 a_{n-1} + B_2 a_{n-2} + \cdots + B_k a_{n-k} = f(n),$$

donde  $f(n)$  es una cierta función no nula. De nuevo, y por simplificar la exposición, suponemos que nuestra ecuación es de grado dos,

$$(*) \quad a_n + \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} = f(n) \quad \text{para cada } n \geq 2.$$

Tendremos, además, dos condiciones iniciales, los valores de  $a_0$  y  $a_1$ .

Centrémonos en las soluciones de la ecuación (\*), a la que nos referiremos como **ecuación inhomogénea**. Sean  $(a_n)$  y  $(b_n)$  dos soluciones de (\*) y consideremos la sucesión suma  $(c_n)$  definida por  $c_n = a_n + b_n$  para cada  $n$ . Obsérvese que

$$\begin{aligned} c_n + \alpha c_{n-1} + \beta c_{n-2} &= (a_n + b_n) + \alpha(a_{n-1} + b_{n-1}) + \beta(a_{n-2} + b_{n-2}) \\ &= (a_n + \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}) + (b_n + \alpha b_{n-1} + \beta b_{n-2}) = f(n) + f(n) = 2f(n). \end{aligned}$$

No obtenemos  $f(n)$ , así que  $(c_n)$  ya no es solución de (\*) y, por tanto, no tenemos la estupenda estructura (vectorial) de antes.

Pero no todo está perdido. Al menos sigue ocurriendo que la solución del problema (ecuación inhomogénea más valores iniciales) existe (basta arrancar la sucesión) y es única. De nuevo, los dos valores iniciales determinan completamente la solución que nos interesa. Así que lo que buscamos es una forma adecuada de escribir la solución general de la ecuación (\*), para lo que nos apoyaremos en lo que ya sabemos de las ecuaciones homogéneas.

Planteamos la **ecuación homogénea** asociada a nuestro problema:

$$(**) \quad a_n + \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} = 0, \quad \text{para cada } n \geq 2.$$

De esta ecuación sabemos cómo calcular su solución general, que será de la forma  $(Ab_n + Bc_n)$ , donde  $(b_n)$  y  $(c_n)$  son sucesiones solución de (\*\*) (con el aspecto que corresponda a cada caso, dependiendo de las raíces de la ecuación característica).

Ahora viene la observación clave: consideremos una solución *particular* de la ecuación (\*). Vale una cualquiera, por ejemplo la que obtenemos arrancando la sucesión a partir de dos valores iniciales que fijemos. Llamemos  $(d_n)$  a esta solución. Lo que afirmamos es que cualquier sucesión de la forma

$$(Ab_n + Bc_n + d_n),$$

donde  $A$  y  $B$  son parámetros, es solución de la ecuación inhomogénea (\*). Dejamos que el lector haga la comprobación pertinente.

Pero además, *toda* solución de (\*) se puede escribir como arriba. Es, una vez más, un argumento de unicidad: si  $(\gamma_n)$  es una solución que empieza por  $(\gamma_0, \gamma_1, \dots)$ , podemos encontrar  $A$  y  $B$  que determinen una sucesión que es solución de (\*) y que empieza como  $(\gamma_n)$ . Así que han de ser la misma. Los detalles quedan como ejercicio 6.2.4 para el lector.

(versión preliminar 28 de noviembre de 2011)

El problema está ya resuelto: si queremos encontrar una fórmula para la sucesión de números  $(a_n)$  que cumplen la ecuación

$$a_n + \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} = f(n), \quad \text{para cada } n \geq 2,$$

junto con las condiciones iniciales  $a_0 = p$  y  $a_1 = q$ ,

- (1) analizamos primero la ecuación homogénea asociada,

$$a_n + \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} = 0,$$

y determinamos la **solución general** de esta ecuación, que será de la forma  $(Ab_n + Bc_n)$ .

- (2) Calculamos una **solución particular**, digamos  $(d_n)$ , de la ecuación completa;  
 (3) Ya tenemos la solución general de la ecuación completa,  $(Ab_n + Bc_n + d_n)$ . Y ahora (y no antes) imponemos las condiciones iniciales para determinar los números  $A$  y  $B$ .

**EJEMPLO 6.2.5** *Encontremos la sucesión de números  $(a_n)$  que satisface la ecuación de recurrencia  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 7$ , junto con las condiciones iniciales  $a_0 = 0$  y  $a_1 = 1$ .*

La ecuación homogénea asociada es la de Fibonacci, de la que conocemos bien la forma de la solución (véase el ejemplo 6.2.1). Ahora nos damos cuenta (!) de que la sucesión cuyos términos son todos iguales a  $-7$  es solución de la ecuación. Nótese que nos referimos únicamente a la ecuación (los dos primeros valores de esta sucesión son, claro,  $-7$  y  $-7$ ). Así que la solución general de la ecuación completa se puede escribir como

$$A \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + B \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n - 7.$$

Imponiendo los valores iniciales  $a_0 = 1$  y  $a_1 = 1$ , y tras unos laboriosos cálculos, determinamos los valores de  $A$  y  $B$  y concluimos que la solución que buscamos viene dada por

$$a_n = \left( \frac{7}{2} + \frac{9\sqrt{5}}{10} \right) \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left( \frac{7}{2} - \frac{9\sqrt{5}}{10} \right) \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n - 7 \quad \text{para cada } n \geq 0. \quad \clubsuit$$

Falta un pequeño detalle: ¿cómo hallamos una solución particular de la ecuación completa? Que además tenga, claro, una fórmula sencilla y manejable. Podemos optar, claro, por el método de prueba y error, o confiar en un golpe de inspiración, como hicimos en el ejemplo anterior. Pero por si acaso no se diera esta circunstancia, existen algunos métodos, casi trucos *ad hoc*, que son útiles cuando la función  $f(n)$  tiene una forma específica.

### Método de los coeficientes indeterminados

La idea de este método, de lo más natural, consiste en buscar la solución particular dentro de la misma “familia” de funciones a la que pertenezca  $f(n)$ . Obsérvese que, en el ejemplo anterior, la solución particular era una constante, como el término no homogéneo.

Ilustramos el método con un ejemplo, en el que también advertiremos las posibles dificultades del procedimiento. Digamos que nos enfrentamos con la ecuación

$$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 3^n.$$

(versión preliminar 28 de noviembre de 2011)

Nuestro objetivo es encontrar una solución particular de la ecuación. Probamos con una de la forma  $\tilde{a}_n = C3^n$ , donde  $C$  es una constante que está a nuestra disposición, y que determinamos con la propia ecuación:

$$\tilde{a}_n - \tilde{a}_{n-1} - \tilde{a}_{n-2} = 3^n \implies C3^n - C3^{n-1} - C3^{n-2} = 3^n \implies 9C - 3C - C = 9,$$

de donde obtenemos que  $C = 9/5$ . Y, efectivamente,  $\tilde{a}_n = \frac{9}{5}3^n$  es una solución particular de la ecuación, como puede comprobar el lector.

Pero ahora imaginemos que la ecuación es

$$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = \tau^n,$$

donde  $\tau$  es la razón áurea. Probamos, como antes, con una solución del tipo  $\tilde{a}_n = C\tau^n$ :

$$\tilde{a}_n - \tilde{a}_{n-1} - \tilde{a}_{n-2} = \tau^n \implies C\tau^n - C\tau^{n-1} - C\tau^{n-2} = \tau^n \implies C(\tau^2 - \tau - 1) = \tau^2.$$

Y no hay manera de determinar  $C$ , porque  $\tau^2 - \tau - 1 = 0$ . El método no funciona, *no puede funcionar*, porque  $\tau^n$  es ya solución de la ecuación homogénea ( $\tau$  era una de las raíces de la ecuación característica), así que no puede ser también solución de la completa.

Inspirándonos en algún argumento que hicimos anteriormente, podríamos intentar con soluciones de la forma  $\tilde{a}_n = Cn\tau^n$ :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n - \tilde{a}_{n-1} - \tilde{a}_{n-2} = \tau^n &\implies Cn\tau^n - C(n-1)\tau^{n-1} - C(n-2)\tau^{n-2} = \tau^n \\ &\implies Cn(\tau^2 - \tau - 1) + C(2 + \tau) = \tau^2 \implies C = \frac{\tau^2}{2 + \tau} = \frac{5 + \sqrt{5}}{10}. \end{aligned}$$

Ya tendríamos determinado el valor de  $C$  y, por tanto, una solución particular. ¿Y si ocurriera (no es el caso) que la sucesión  $n\tau^n$  también entre las soluciones de la ecuación homogénea? Entonces probaríamos con una del tipo  $n^2\tau^n \dots$  y así sucesivamente.

Suele también aplicarse este método cuando la función  $f(n)$  es un polinomio, o una función seno o coseno. Mostramos aquí un último ejemplo, al tiempo que dejamos que el lector se entretenga con los ejercicios propuestos de esta sección.

**EJEMPLO 6.2.6** *Consideremos las sucesiones dadas, para cada  $n \geq 2$ , por*

$$(1) \ a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 2 + n; \quad (2) \ 2a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 2 + n; \quad (3) \ a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 2 + n.$$

*Las condiciones iniciales son, en los tres casos,  $a_0 = 0$  y  $a_1 = 1$ .*

La ecuación homogénea del caso (1) tiene asociada la ecuación característica es  $r^2 - r - 1 = 0$ , cuyas soluciones son los habituales  $\tau$  y  $-1/\tau$ . Así que la solución general de la homogénea se puede escribir de la forma

$$\left( A\tau^n + B\left(-\frac{1}{\tau}\right)^n \right).$$

La forma del término no homogéneo nos sugiere buscar soluciones particulares de la ecuación completa de la forma  $\tilde{a}_n = C + Dn$ . Llevándolo a la ecuación,

$$2 + n = (C + Dn) - (C + D(n-1)) - (C + D(n-2)) = (3D - C) - Dn,$$

de donde, por comparación, deducimos que  $D = -1$  y  $C = -5$ .

*(versión preliminar 28 de noviembre de 2011)*

Así que la solución particular viene dada por  $\tilde{a}_n = -1 - 5n$  y, por tanto, la solución general de la ecuación completa se podrá escribir como

$$\left( A \tau^n + B \left( -\frac{1}{7} \right)^n \right) - (1 + 5n).$$

Los valores de  $A$  y  $B$  se determinan usando las condiciones iniciales  $a_0 = 0$  y  $a_1 = 1$ .

En el caso (2), la ecuación característica es  $2r^2 - r - 1 = 0$ , cuyas soluciones son  $1$  y  $-1/2$ . Por lo tanto, la solución general de la homogénea será

$$\left( A + B \left( -\frac{1}{2} \right)^n \right).$$

Nótese que ahora las constantes son solución de la ecuación homogénea. Así que, si intentáramos una solución particular de la forma  $\tilde{a}_n = C + Dn$ , como antes, llegaríamos a

$$2 + n = 2(C + Dn) - (C + D(n-1)) - (C + D(n-2)) = 3D,$$

y no habría forma de cuadrar los coeficientes. Pero si nos vamos a una del tipo  $\tilde{a}_n = Cn + Dn^2$ , entonces

$$2 + n = 2(Cn + Dn^2) - (C(n-1) + D(n-1)^2) - (C(n-2) + D(n-2)^2) = (2C - 5D) + 6Dn$$

(nótese cómo se cancelan los términos de grado alto), lo que daría que  $D = 1/6$  y  $C = 11/12$ .

Finalmente, en el caso (3), el  $1$  es la raíz (doble) de la ecuación característica, de manera que la solución general de la homogénea será de la forma

$$(A + Bn).$$

Ahora tanto las constantes como los múltiplos de  $n$  son solución de la homogénea, así que, para hallar una solución particular de la ecuación completa, deberemos buscarla de la forma  $\tilde{a}_n = Cn^2 + Dn^3$ . Dejamos que el lector se entretenga con los cálculos. ♣

### 6.2.3. Sistemas de ecuaciones de recurrencia

Nos planteamos la siguiente cuestión: dos sucesiones,  $(a_n)$  y  $(b_n)$ , verifican el siguiente sistema de ecuaciones de recurrencia lineales (de grado uno), homogéneas y con coeficientes constantes:

$$(*) \quad \begin{cases} a_n = \alpha_{1,1} a_{n-1} + \alpha_{1,2} b_{n-1}, \\ b_n = \alpha_{2,1} a_{n-1} + \alpha_{2,2} b_{n-1}, \end{cases} \quad \text{para cada } n \geq 1.$$

Los  $\alpha_{ij}$  son ciertos números reales dados, y además tenemos unas condiciones iniciales  $a_0 = p$  y  $b_0 = q$ . Resulta conveniente escribir el sistema anterior en forma matricial:

$$(*) \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{para } n \geq 1,$$

Llamaremos *matriz de transición*<sup>17</sup> a la matriz  $A$ .

<sup>17</sup>El nombre viene sugerido por la siguiente interpretación: un cierto sistema viene descrito por los valores de las sucesiones  $a_n$  y  $b_n$  en cada "tiempo"  $n$ . La matriz  $A$  nos dice cómo evoluciona el sistema de un instante de tiempo al siguiente, cuál es la regla de transición entre ambos "estados".

Nuestro objetivo es obtener fórmulas para los términos generales de las sucesiones  $(a_n)$  y  $(b_n)$ . La resolución es sencilla y directa: aplicamos reiteradamente la relación (\*) hasta llegar al caso  $n = 0$ , que conocemos. En el lenguaje matricial, la iteración de la regla de recurrencia se traduce, simplemente, en la multiplicación de matrices:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ b_{n-2} \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

Como conocemos los valores de  $a_0$  y  $b_0$ , todo el problema se reduce al de calcular la potencia  $n$ -ésima de la matriz de transición  $A$ . ¿Es esto sencillo? La respuesta es casi obvia: depende de cómo sea la matriz  $A$ , claro. Veamos un par de ejemplos preparatorios.

EJEMPLO 6.2.7 *Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1}, \\ b_n = 3b_{n-1}, \end{cases}$$

para cada  $n \geq 1$ , junto con las condiciones iniciales  $a_0 = 7$  y  $b_0 = 5$ .

Como las dos ecuaciones están “desacopladas” (para resolver una no necesitamos la información de la otra), podríamos optar por resolver cada una por su lado. Pero sigamos el procedimiento general:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

Como podrá comprobar el lector sin dificultad, la potencia  $n$ -ésima de una matriz diagonal es fácil de calcular:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

De forma que

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n a_0 \\ 3^n b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \times 2^n \\ 5 \times 3^n \end{pmatrix}.$$

Leyendo componente a componente, obtenemos las soluciones de cada ecuación. ♣

EJEMPLO 6.2.8 *Consideremos ahora las condiciones iniciales  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = 3$  y el sistema*

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} + 2b_{n-1} \end{cases} \quad \text{para cada } n \geq 1.$$

La solución del problema viene dada (escrita en forma matricial) por

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

La matriz no es diagonal, pero el lector podrá comprobar (por inducción, por ejemplo), que

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix},$$

(versión preliminar 28 de noviembre de 2011)



de manera que la solución del problema es

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n 2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n \\ n 2^{n-1} + 3 \times 2^n \end{pmatrix}$$

Así que la solución viene dada por  $a_n = 2^n$  y  $b_n = n 2^{n-1} + 3 \times 2^n$ . ♣

Hemos visto que hay dos casos especialmente sencillos: cuando la matriz es diagonal o “semidiagonal”,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \longrightarrow A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix}, \quad y \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \longrightarrow A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ n \lambda^{n-1} & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

Estos dos casos nos van a permitir resolver el caso general. Todo lo que sigue es parte del folklore del Álgebra lineal. Imaginemos que, para ciertos números  $\lambda$  y  $\mu$  y para cierta matriz  $P$  ( $2 \times 2$  e invertible), pudiéramos escribir la matriz  $A$  de la siguiente manera:

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Si fuera así, el cálculo de  $A^n$  sería inmediato. Véase, por ejemplo, el caso de la potencia 2:

$$A^2 = \left[ P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1} \right]^2 = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix} P^{-1},$$

donde hemos utilizado que  $PP^{-1} = I$ , la matriz identidad  $2 \times 2$ . Un argumento similar (o una prueba por inducción) nos permite deducir que

$$A^n = P \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} P^{-1},$$

con lo que el problema se resolvería efectuando este producto de tres matrices (recordemos que al final habrá que multiplicar también por el vector de condiciones iniciales). Algo análogo ocurriría si  $A$  se pudiera escribir como

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}, \quad \text{en cuyo caso tendríamos que } A^n = P \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ n \lambda^{n-1} & \lambda^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

El resultado que nos interesa dice así: dada una matriz  $A$  de dimensiones  $2 \times 2$ , podremos escribirla de una de las dos siguientes formas<sup>18</sup>:

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}, \quad \text{o bien} \quad A = Q \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} Q^{-1},$$

donde los números  $\lambda$  y  $\mu$  son los llamados **autovalores** de la matriz (en el segundo caso,  $\lambda$  sería un autovalor doble), y la matriz  $P$  (ó  $Q$ ) es invertible. Estas matrices se calculan a

<sup>18</sup>Llamadas *formas canónicas de Jordan*. En realidad, estamos obviando algunas sutilezas, porque lo expuesto es cierto si permitimos que los autovalores sean números complejos. Si no son reales, hay otras formas canónicas que nos permiten escribir la matriz en términos reales.

partir de los **autovectores** asociados a los autovalores. No toca aquí entrar en más detalles al respecto, así que nos limitaremos a ver un par ejemplos, en los que supondremos cierto manejo con estos conceptos.

**EJEMPLO 6.2.9** *Una reacción en cadena:* en un cierto medio hay átomos de un determinado elemento, contra los que lanzamos dos tipos de partículas,  $A$  y  $B$ . Cuando una partícula  $A$  choca con un átomo, éste se desintegra, dando lugar a 2 del tipo  $A$  y a 3 del tipo  $B$ . Si es una partícula  $B$  la que choca, entonces se producen 1 de  $A$  y 4 de  $B$ . Interesa el número de partículas de cada clase tras  $n$  unidades de tiempo, si partimos de 2 de tipo  $A$  y 1 de tipo  $B$ .

Llamemos  $a_n$  y  $b_n$  al número de partículas de tipo  $A$  y  $B$ , respectivamente, tras  $n$  unidades de tiempo. Los procesos de desintegración se traducen en el sistema de recurrencias

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1}, \\ b_n = 3a_{n-1} + 4b_{n-1}, \end{cases} \quad \text{para cada } n \geq 1,$$

mientras que la condición inicial es  $a_0 = 2$  y  $b_0 = 1$ . En términos matriciales

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \text{cuya solución es } \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

para cada  $n \geq 1$ . Así que, si llamamos  $M$  a la matriz de transición del sistema, sólo resta calcular su potencia  $n$ , para lo que será necesario diagonalizarla. Sus autovalores son las soluciones de la ecuación

$$\det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 3 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = 0, \quad \text{es decir, } (2 - \lambda)(4 - \lambda) - 3 = 0,$$

que resultan ser  $\lambda_1 = 1$  y  $\lambda_2 = 5$ . El subespacio asociado al autovalor  $\lambda_1$  es el núcleo de la aplicación representada por la matriz  $M - \lambda_1 I$ . Así que debemos considerar el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que nos dice que podemos tomar como autovector asociado al autovalor  $\lambda_1 = 1$  a  $\mathbf{v}_1 = (1, -1)$ .

El subespacio asociado al autovalor  $\lambda_2 = 5$  viene dado por el núcleo de  $M - \lambda_2 I$ , y si procedemos de manera análoga, obtenemos un posible autovector,  $\mathbf{v}_2 = (1, 3)$ , para este autovalor. Ya tenemos la matriz  $P$  de cambio de base,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{cuya inversa es } P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y por tanto } M = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Calcular entonces  $M^n$  ya no representa dificultad alguna:

$$M^n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 + 5^n & -1 + 5^n \\ -3 + 3 \times 5^n & 1 + 3 \times 5^n \end{pmatrix}.$$

Finalmente, la solución del problema es

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 + 5^n & -1 + 5^n \\ -3 + 3 \times 5^n & 1 + 3 \times 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 + 3 \times 5^n \\ -5 + 9 \times 5^n \end{pmatrix}.$$

(versión preliminar 28 de noviembre de 2011)

tiempo	0	1	2	3	4	5	...
Tipo A	2	5	20	95	470	2345	...
Tipo B	1	10	55	280	1405	7030	...

Así que, en tiempo  $n$ , hay  $a_n = \frac{1}{4}(5 + 3 \times 5^n)$  partículas de tipo A, mientras que de tipo B habrá  $b_n = \frac{1}{4}(-5 + 9 \times 5^n)$ . A la izquierda listamos los primeros casos. Ambas poblaciones crecen muy rápidamente, como corresponde al carácter exponencial de las soluciones. Y, como la propia dinámica del sistema sugería, va a haber más partículas del tipo B que del tipo A.

Pero podría interesarnos saber cuál es la razón entre las dos poblaciones, si se aproxima a un límite finito o no. Obsérvese que, para  $n$  muy grande,  $a_n \sim \frac{3}{4}5^n$  y  $b_n \sim \frac{9}{4}5^n$ , por lo que la razón entre las poblaciones se aproxima (y bastante rápidamente) a una proporción 1:3. ¡Esto ya no era tan obvio con sólo mirar las recurrencias! ♣

En el caso de dimensión 2, la forma de Jordan no diagonal aparece cuando la matriz  $A$  tiene un autovalor doble  $\lambda$ , y el núcleo de  $A - \lambda I$  sólo tiene dimensión 1 (sólo hay un autovector asociado). Si consideramos matrices de dimensión  $d$ , la descripción se complica un poco: la forma de la matriz canónica de Jordan dependerá de la multiplicidad de los autovalores y del número de autovectores que tenga asociado cada uno de ellos. Pero, esencialmente, es una matriz “diagonal por cajas”, donde cada una de las cajas es de la forma que aparece a la derecha. Veamos un ejemplo:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 6.2.10 Consideremos el siguiente problema:

$$a_0 = 1, b_0 = 3, c_0 = 2 \quad y \quad \begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} \\ b_n = 3b_{n-1} \\ c_n = b_{n-1} + 3c_{n-1} \end{cases} \quad \text{para cada } n \geq 1.$$

La solución del sistema viene dada por la ecuación matricial que escribimos a la derecha. Los autovalores de  $A$  (las soluciones de  $\det(A - \lambda I) = 0$ ) son los números 2 y 3 (éste, un autovalor doble). Para el autovalor simple,  $\lambda = 2$ , el cálculo del núcleo de  $A - 2I$  nos dice que podemos tomar como autovector asociado a  $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$ . Pero el subespacio asociado al autovalor 3 sólo tiene dimensión 1. Concretamente, el núcleo de  $A - 3I$  está generado por el vector  $(1, 0, 1)$ . La matriz canónica no va a ser diagonal, así que tendremos que recurrir a un sustituto. Calculamos el núcleo de la matriz  $(A - 3I)^2$ , que resulta estar generado por los vectores  $(1, 0, 1)$  y  $(0, 1, 0)$ . Tomamos ahora un vector que esté en el núcleo de  $(A - 3I)^2$  pero no en el de  $A - 3I$ ;  $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 1)$  podría valer. Ahora calculamos

$$\mathbf{v}_3^t = (A - 3I)\mathbf{v}_2^t,$$

para obtener  $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1)$ . Estos tres vectores forman (al ponerlos como columnas) la matriz  $P$  que mostramos a continuación, junto con su inversa  $P^{-1}$ :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{de manera que} \quad A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

(versión preliminar 28 de noviembre de 2011)

El cálculo de  $A^n$  es ahora ya muy sencillo:

$$A^n = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & n3^{n-1} & 3^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n & n3^{n-1} & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & n3^{n-1} & 3^n \end{pmatrix}$$

Finalmente, la solución del sistema se obtiene multiplicando  $M^n$  por el vector de condiciones iniciales, y el resultado es  $a_n = -2^n + (n+2)3^n$ ,  $b_n = 3^{n+1}$  y  $c_n = (n+2)3^n$ . ♣

### EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 6.2

**6.2.1** Consideramos la ecuación de recurrencia  $x_n = \alpha x_{n-1} + \beta$ , para cada  $n \geq 1$ , junto con el valor inicial  $x_0$ . Compruébese que

- (a) si  $\beta = 0$ , entonces  $x_n = \alpha^n x_0$  para cada  $n \geq 0$ ;  
 (b) si  $\alpha = 1$ , entonces  $x_n = n\beta + x_0$  para cada  $n \geq 0$ ;  
 (c) si  $\alpha \neq 1$ , entonces

$$x_n = \alpha^n x_0 + \beta \left( \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} \right), \quad \text{para cada } n \geq 0.$$

**6.2.2** Consideremos dos sucesiones  $(a_n)$  y  $(b_n)$  linealmente independientes y que sean solución de la ecuación  $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}$  para cada  $n \geq 2$ . Sea  $(c_n)$  otra solución de la ecuación. Compruébese que la sucesión  $(c_n)$  puede escribirse como combinación lineal de las sucesiones  $(a_n)$  y  $(b_n)$ .

**6.2.3** Estamos con la ecuación  $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}$ , para cada  $n \geq 2$ , junto con las condiciones iniciales  $a_0$  y  $a_1$ . Suponemos que  $r$  y  $s$  son las dos raíces (reales y distintas) de la ecuación característica asociada. Compruébese que la solución de la ecuación de recurrencias (y las condiciones iniciales) se puede escribir como

$$(a_1 - a_0 s) \frac{r^n - s^n}{r - s} + a_0 s^n.$$

Ahora suponemos que  $r$  y  $s$  se hacen cada vez más próximas (en el límite, estaremos en el caso de una raíz doble de la ecuación característica). Compruébese, quizás apelando a la noción de derivada, que la solución en el caso de raíz doble se puede escribir como combinación lineal de  $s^n$  y  $ns^n$ .

**6.2.4** Consideremos la ecuación inhomogénea

$$(*) \quad a_n - \alpha a_{n-1} - \beta a_{n-2} = f(n) \quad \text{y la homogénea asociada} \quad (**) \quad a_n - \alpha a_{n-1} - \beta a_{n-2} = 0.$$

- (a) La suma de dos soluciones de  $(*)$  no es solución de  $(*)$ , mientras que la suma de dos soluciones de  $(**)$  sí que es solución de  $(**)$ . Compruébese que la resta de dos soluciones de  $(*)$  es solución de  $(**)$ .  
 (b) Compruébese que toda solución de  $(*)$  se puede escribir como la suma de la solución general de  $(**)$  con una solución particular de  $(*)$ .

**6.2.5** (a) Hállese una fórmula para los números  $u_n$  que verifican:  $u_0 = a$ ,  $u_1 = b$  y  $u_{n+2} = u_n + n$  para cada  $n \geq 1$ .

(b) Un triple lineal es una lista de 3 números naturales  $a, b, c$ , ordenados,  $a < b < c$ , y tales que  $c - b = b - a$ . Sea  $T_n$  el número de triples lineales formados con números comprendidos entre 1 y  $n$ . Pruébese que

$$T_{2n+1} = T_{2n} + n$$

y obténgase una recurrencia análoga para  $T_{2n}$ . Hállese una fórmula para  $T_n$ .

(versión preliminar 28 de noviembre de 2011)

**6.2.6** Resuélvanse las recurrencias:

(a)  $a_{n+3} = 4a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n$ ,  $n \geq 0$  con condiciones iniciales  $a_0 = a_1 = 0$  y  $a_2 = 1$ .

(b)  $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$ ,  $n \geq 0$  con condiciones iniciales  $a_0 = a_1 = 0$  y  $a_2 = 1$ .

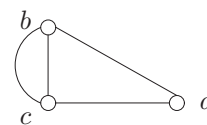
(c)  $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 2a_n + n$ ,  $n \geq 0$  con condiciones iniciales  $a_0 = 0$  y  $a_1 = 2$ .

**6.2.7** En un juego en el que  $p = 0,49$ , hacemos apuestas de 1 ficha y nos retiramos cuando tengamos 100 fichas. ¿Qué cantidad inicial de fichas deberemos tener para poder asegurar que tenemos, al menos, un 50% de oportunidades de terminar ganando?

**6.2.8** Hállense las sucesiones  $(a_n)$  y  $(b_n)$  dadas por  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = 0$  y

$$\begin{cases} 2a_n = 5a_{n-1} + b_{n-1} \\ 2b_n = a_{n-1} + 5b_{n-1} \end{cases}$$

**6.2.9** Consideremos la figura que dibujamos a la derecha. Colocamos una ficha (aleatoriamente) en una de las posiciones  $a$ ,  $b$  ó  $c$  y luego la movemos siguiendo los caminos posibles del dibujo (todos los movimientos son igualmente probables). Llamamos  $a_n$  a la probabilidad de que la ficha esté en  $a$  tras  $n$  movimientos (de forma análoga se definen  $b_n$  y  $c_n$ ).



(a) Muéstrase que:  $a_n + b_n + c_n = 1$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

(b) Calcúlense  $a_n$ ,  $b_n$  y  $c_n$ . Estímense estas probabilidades en el límite  $n \rightarrow \infty$ .

(c) ¿Cómo cambiaría el problema si la distribución inicial no fuera aleatoria? Por ejemplo, si sabemos que la ficha está inicialmente en  $a$ .

**6.2.10** La sucesión  $(a_n)$  está definida por una ecuación de recurrencia lineal y homogénea de grado  $m$ . Sea  $r$  el máximo módulo de las raíces de la ecuación característica correspondiente. Pruébese que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{r^n} < +\infty.$$