Capítulo 12

Funciones generatrices

Como el lector habrá observado, en muchas cuestiones combinatorias que hemos venido estudiando es natural especificar, aunque de forma genérica[1], el tamaño, n, de un conjunto de referencia, o el paso (n también) de un proceso de construcción combinatorio, o las veces (n, ¡cómo no!) que se repite un procedimiento. La respuesta a la cuestión de interés, que podemos nombrar, de manera genérica también, como a_n, depende de n. Si por ejemplo n toma los valores $0, 1, 2, \ldots$, los resultados correspondientes forman una sucesión $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

En ocasiones, disponemos de una fórmula para el término general de la sucesión en función del parámetro n. Por ejemplo, el número de subconjuntos de un conjunto de tamaño n es $a_n = 2^n$. O, por ejemplo, si elegimos repetidamente números $+1$ ó -1 hasta un total de $2n$ y sumamos los resultados, el número de elecciones en las que la suma final vale 0 es $a_n = \binom{2n}{n}$.

En otras ocasiones, nuestro análisis nos permite obtener una regla de recurrencia para los números a_n. Si por ejemplo a_n cuenta el número de listas de ceros y unos de longitud n en las que no aparecen ceros consecutivos (pero sí pueden aparecer unos consecutivos), entonces

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad \text{para cada } n \geq 3,$$

como vimos en el ejemplo 6.1.5. Nuestra ecuación de recurrencia favorita, la de Fibonacci. Aunque los a_n no son exactamente los números de Fibonacci F_n, pues las condiciones iniciales son ligeramente distintas (recuérdese la definición 6.1). En páginas anteriores han ido pareciendo ecuaciones de recurrencia para los coeficientes binómicos, los números de Stirling, el número de particiones de un entero con ciertas características, etc. Una regla de recurrencia (complementada con unas condiciones iniciales) es, sin duda, una buena manera de describir una sucesión (a_n). Pero, en muchas ocasiones, no nos permite *entender* cómo es la sucesión: si crece o decrece, cómo de deprisa lo hace, etc. En el capítulo 6 aprendimos diversas técnicas para *resolver*, esto es, obtener una fórmula para los a_n en función de n, ciertos tipos de ecuaciones de recurrencia. Pero no siempre es posible hacerlo, e incluso en el caso de tenerla, pudiera ser tan complicada que fuera difícil extraer la información que encierra.

En general, no nos interesa un término en concreto, sino toda la sucesión (a_n). Si queremos *aprender* sobre la sucesión (a_n) en sí, una posibilidad, en muchos casos la mejor posible, es

[1] Perdónesenos el oximoron.

aprehenderla mediante un único objeto, una función generatriz. En palabras de Wilf (de su muy recomendable *Generatingfunctionology*),

> una función generatriz es una cuerda de la ropa en la que tendemos una sucesión de números para exhibirla.

Estas funciones permiten codificar sucesiones de la siguiente manera:

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} \quad \longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = f(x)\,.$$

Simplemente, decidimos que los números a_n son los sucesivos coeficientes de la serie de potencias que nombramos como $f(x)$. Al manipular $f(x)$ estaremos manipulando la sucesión (a_n) en su conjunto. Este enfoque, algo inocuo a primera vista, se revelará (y éste es el objetivo de este capítulo y los dos siguientes) un eficacísimo método.

Por ejemplo, al codificar la sucesión desconocida (a_n) que cumple

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{para cada } n \geq 2,$$

obtendremos que la función generatriz asociada es

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}\,.$$

Y de aquí, tras algunas manipulaciones, obtendremos, ¡oh, sorpresa!, que

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

para cada $n \geq 0$, lo que nos habría costado adivinar *a priori*[2].

Pero no sólo esto. Tener la sucesión codificada como coeficientes de una función tiene muchas ventajas. Sea, por ejemplo, a_n el número de subconjuntos de tamaño n que podemos extraer de un conjunto con 100 elementos. Sabemos que $a_n = \binom{100}{n}$ para cada $n = 0, 1, \ldots, 100$, mientras que $a_n = 0$ si $n > 100$. Escribamos entonces

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{100} \binom{100}{n} x^n = (1+x)^{100}\,,$$

donde ya hemos aplicado el teorema del binomio. Derivando y sustituyendo en $x = 1$ (tanto en la serie de potencias como en la expresión final de la función), obtenemos que

$$100 \times 2^{99} = \sum_{n=0}^{100} n \binom{100}{n}.$$

O, en otras palabras, que

$$50 = \frac{1}{2^{100}} \sum_{n=0}^{100} n \binom{100}{n} = \frac{\sum_{n=0}^{100} n \binom{100}{n}}{\sum_{n=0}^{100} \binom{100}{n}}\,,$$

que nos dice el *tamaño medio* de los subconjuntos es 50.

[2]Valga el pleonasmo. Adivinar *a posteriori* es más habitual y sencillo.

12.1. Introducción a las funciones generatrices

Es hora de que formalicemos un poco. En lo que sigue vamos a asociar funciones a sucesiones infinitas de números,

$$f(x) \quad \longleftrightarrow \quad (a_n)_{n=0}^{\infty}, \qquad \text{mediante la regla} \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\,.$$

$f(x)$ es la **función generatriz**[3] de los (a_n). Usamos la palabra "función" aunque, *a priori*, puede que la serie no converja y no tengamos realmente una función. A veces, por ejemplo cuando queramos sustituir x por un valor determinado, sí que tendremos que prestar atención a las cuestiones de convergencia. Pero mientras no sea ése el caso, podríamos argumentar todo mediante series formales (véase la sección 12.7).

El número a_n, que generalmente será la respuesta a un cierto problema combinatorio, es el coeficiente de x^n en la serie de potencias anterior, lo que resumiremos a veces con la notación

$$a_n = \mathrm{Coef}_n[f(x)]\,.$$

A. Funciones generatrices de suma conocida

Si disponemos de una expresión para la función generatriz, entonces tenemos grandes ventajas. Por ejemplo, si resulta que la serie de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ converge en un cierto intervalo $(-R, R)$ y conocemos la expresión de $f(x)$, entonces podremos evaluar la función (y cualquiera de sus derivadas) en valores de x que cumplan que $|x| < R$. En particular, podremos calcular los coeficientes mediante la fórmula de Taylor habitual,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,,$$

aunque, en general, este método de cálculo de coeficientes es poco práctico. De todo esto hablaremos en la sección 12.3, pero, por ahora, veamos algunos ejemplos.

Por razones que pronto se harán evidentes, nuestra *serie de potencias básica*, que deberemos tener siempre en mente, es la suma de la serie geométrica,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\,,$$

que, desde el punto de vista analítico, sólo tiene sentido si $|x| < 1$. En este nuevo lenguaje, $1/(1-x)$ es la función generatriz de la sucesión infinita de unos:

$$\frac{1}{1-x} \quad \longleftrightarrow \quad (1)_{n=0}^{\infty}\ ; \quad \text{o también } \mathrm{Coef}_n[1/(1-x)] = 1 \text{ para cada } n = 0, 1, 2 \ldots.$$

[3] En ocasiones, *funciones generatrices ordinarias*, para distinguirlas de las que se manejan en otros contextos: funciones generatrices de probabilidad (véase el capítulo 13), funciones generatrices exponenciales o funciones generatrices de Dirichlet (consúltese, para estos dos tipos, el capítulo 15). Estas otras funciones generatrices son, simplemente, variaciones en el método de codificar: contienen la misma información, pero preparada para cálculos y análisis particulares.

También conocemos ya la serie de potencias que define la función exponencial:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x\,; \quad e^x \;\longleftrightarrow\; \left(\frac{1}{n!}\right)_{n=0}^{\infty}\,; \quad \text{o bien } \operatorname{Coef}_n\,[e^x] = \frac{1}{n!} \quad \text{para cada } n \geq 0.$$

Obsérvese que la serie de potencias de la izquierda converge para cualquier valor de x.

El teorema del binomio nos proporciona otro caso conocido: para $m \geq 1$,

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n\,.$$

Una representación válida para todo x porque, en realidad, la serie de potencias es un polinomio, pues para $n > m$ los coeficientes binómicos $\binom{m}{n}$ son nulos:

$$(1+x)^m \;\longleftrightarrow\; \left(\binom{m}{0}, \binom{m}{1}, \dots, \binom{m}{m}, 0, 0, \dots\right)\,;$$

EJEMPLO 12.1.1 *Calculemos los coeficientes de la función $f(x) = (1-x)^{-m-1}$, para $m \geq 0$.*

Obsérvese que el caso $m = 0$ corresponde a la serie geométrica, cuyo desarrollo ya conocemos. Nótese también que, al derivar sucesivamente,

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}\,, \quad \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}\,, \quad \left(\frac{1}{1-x}\right)''' = \frac{6}{(1-x)^4}\,, \dots$$

generamos, salvo constantes, la familia de funciones de interés. Mientras estemos en $|x| < 1$, todas estas manipulaciones son válidas (véase la subsección 12.3.1). Así que podemos calcular los coeficientes de la función $(1-x)^{-m-1}$, para cierto $m \geq 0$, mediante la fórmula de Taylor.

Sea entonces $f(x) = (1-x)^{-m-1}$, y calculemos sus derivadas sucesivas:

$$f'(x) = \frac{m+1}{(1-x)^{m+2}}\,, \; f''(x) = \frac{(m+1)(m+2)}{(1-x)^{m+3}}\,, \; \dots\,, \; f^{(n)}(x) = \frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}{(1-x)^{m+n+1}}.$$

Así que

$$f^{(n)}(0) = \frac{(m+n)!}{m!}.$$

Por tanto,

$$\operatorname{Coef}_n\,[f(x)] = \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(0) = \frac{1}{n!}\left(\frac{(m+n)!}{m!}\right) = \binom{m+n}{m}.$$

Es decir,

$$\frac{1}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n}{m} x^n\,.$$

O, escrito de otro modo,

$$\frac{1}{(1-x)^{m+1}} \quad \longleftrightarrow \quad \left(\binom{m+n}{m}\right)_{n=0}^{\infty} = \left(\binom{m}{m}, \binom{m+1}{m}, \binom{m+2}{m}, \dots\right)\,.$$

Nótese que m es un parámetro fijo y que n es el índice de la sucesión. Cuando $m = 0$, recuperamos la sucesión que vale uno para cada n. ♣

12.1.1. El método de las funciones generatrices

Vamos a ilustrar la manera en que hay que proceder (y las precauciones que habría que tomar) a la hora de utilizar las funciones generatrices en el siguiente ejemplo, en el que recurrimos a una de nuestras sucesiones favoritas, la de Fibonacci, definida por

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{y} \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad \text{para cada } n \geq 2.$$

El primer paso es asociar a estos números su función generatriz,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n\, x^n \,,$$

de la que no sabemos, o al menos haremos como que no sabemos[4], si converge o no. Para ilustrar la versatilidad de este enfoque de las funciones generatrices, no fijamos todavía nuestro objetivo; podría interesarnos obtener una fórmula cerrada para los F_n (esto es, resolver la recurrencia), quizás calcular alguna serie numérica relacionada con los F_n, o quizás...

La información de que disponemos es la ecuación de recurrencia (y los valores iniciales), así que la utilizamos para manipular la sucesión de números (elevaremos estas manipulaciones formales a la categoría de "reglas" en la sección 12.2):

$$\begin{aligned} F(x) &= F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + F_3 x^3 + \cdots \\ &= F_0 + F_1 x + (F_0 + F_1) x^2 + (F_1 + F_2) x^3 + \cdots \\ &= F_0 + F_1 x + \big(F_0\, x^2 + F_1\, x^3 + F_2\, x^4 + \cdots\big) + \big(F_1\, x^2 + F_2\, x^3 + F_3\, x^4 + \cdots\big) \\ &= F_0 + F_1 x + x^2 F(x) + x(F(x) - F_0) \\ \implies & F(x)(1 - x - x^2) = x \,, \end{aligned}$$

donde, en el último paso, hemos utilizado los valores iniciales, $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$. Sigue siendo una identidad formal: el producto de $F(x)$ por el polinomio $(1 - x - x^2)$ da como resultado la sucesión de números $(0, 1, 0, 0, \dots)$, que hemos codificado como x. Seguimos: la solución (formal) es que $F(x)$ coincide con el producto de x por la recíproca (formal) de $(1 - x - x^2)$, que denotamos como $1/(1 - x - x^2)$:

$$F(x) = x\, \frac{1}{1 - x - x^2}$$

(el lector que esté interesado en el significado preciso de lo que estamos denominando "identidades formales" puede consultar la sección 12.7). Ahora bien, la *función* $x/(1 - x - x^2)$ tiene un desarrollo de potencias, que llamamos simplemente $\mathbf{\Sigma}(x)$. Esto es un resultado general (véase el teorema 12.3), pero en este caso no hace falta apelar a él, pues basta observar que

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = x\, \frac{1}{1 - (x + x^2)} = x \sum_{n=0}^{\infty} (x + x^2)^n \,,$$

donde hemos utilizado la serie geométrica. Así que, necesariamente, la expresión formal $x/(1 - x - x^2)$, esto es, $F(x)$, debe coincidir con la serie de potencias $\mathbf{\Sigma}(x)$.

[4] De la fórmula de Binet (véase la sección 6.3) se deduce que F_n es prácticamente igual a $\tau^n/\sqrt{5}$. Incluso sin necesidad de conocer la fórmula explícita, se comprueba por inducción que $F_n < 2^n$ si $n \geq 1$. De estas estimaciones se puede deducir sin dificultad la convergencia de la serie para $|x| < R$ con, por ejemplo, $R = 1/2$.

Si, como haremos en el ejemplo 12.4.1, nos interesara obtener una fórmula para los F_n, podríamos reescribir los términos $(x+x^2)^n$ que aparecen en la serie $\mathbf{\Sigma}(x)$ utilizando, a su vez, el teorema del binomio. O quizás, directamente a partir de $1/(1-x-x^2)$, utilizar el método de las fracciones simples para obtener la fórmula de Binet (recuérdese el ejemplo 6.2.1)

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \text{para cada } n \geq 0$$

Pero nuestro análisis nos permite llegar más allá. Por ejemplo, como veremos más adelante, la serie $\mathbf{\Sigma}(x)$ converge en el intervalo $(-1/\tau, 1/\tau) \approx (-0{,}6180, 0{,}6180)$. Por supuesto, la razón áurea tenía que aparecer. Así que, *a posteriori*, comprobamos que $F(x)$ converge en ese intervalo. De manera que tiene sentido evaluar $F(x)$ en, digamos, $x = 1/2$, para obtener que

$$F(1/2) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \frac{1}{2^n} = \frac{1/2}{1-(1/2)-(1/2)^2} = 2\,.$$

O quizás en $x = \tau/3$, también en el intervalo de convergencia, para obtener la identidad

$$F(\tau/3) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \frac{\tau^n}{3^n} = \frac{\tau/3}{1-(\tau/3)-(\tau/3)^2} = \frac{3\tau}{9-3\tau-\tau^2}\,.$$

O, incluso, y con ciertas precauciones, atrevernos a evaluar la serie de potencias en un valor extremo de la región de convergencia, como $x = 1/\tau$.

En los usos de funciones generatrices que iremos desgranando más adelante, deberíamos incluir siempre justificaciones de esta índole, aunque no insistiremos en ellas, sobre todo, para no perder el hilo y repetirnos en exceso. Pero el lector está ya avisado.

Guiados por los pasos que hemos ido dando en el ejemplo de los números de Fibonacci, podemos enunciar tres etapas para el método de las funciones generatrices:

- La primera consiste, simplemente, en codificar la sucesión de interés con una función generatriz. Siguiendo a Wilf, se trata de colgar la sucesión de números de la cuerda de tender ropa que es la función generatriz $f(x)$.
- Después, intentaremos obtener una expresión explícita, una *fórmula* para $f(x)$, para lo que nos ayudaremos de las reglas de manipulación que veremos en la sección 12.2.
- Por último, necesitaremos *desarrollar* $f(x)$ en serie de potencias, pues, al fin y al cabo, nos interesan sus coeficientes. O quizás nos baste con analizar las propiedades de la $f(x)$ obtenida como *función* para, por ejemplo, evaluarla en ciertos valores. Para esto, serán útiles las herramientas y resultados que recogemos en la sección 12.3.

Con esto ya tendremos la técnica. La sección 12.4 nos permitirá comprobar la potencia de las funciones generatrices para *resolver* ecuaciones de recurrencia. Y, finalmente, en la sección 12.5 veremos algunas otras cuestiones que el uso de las funciones generatrices resuelve. En la sección 12.7, y a modo de apéndice, desarrollaremos parte del lenguaje de las series de potencias formales. Dejamos, por su especial relevancia, el estudio del uso de las funciones generatrices en ciertas cuestiones probabilísticas y combinatorias para los capítulos 13 y 14, respectivamente.

12.2. Manipulación de funciones generatrices

Veremos ahora cómo algunas operaciones entre funciones generatrices se traducen en sus sucesiones asociadas; o viceversa. En todo lo que sigue, salvo cuando sea imprescindible hacer un estudio explícito, supondremos que todas las manipulaciones están bien justificadas. El lector con inclinaciones analíticas puede revisar el ejercicio 12.3.1; aquél cuyo espíritu sea más algebraico y quiera interesarse por el punto de vista de las series formales de potencias puede consultar la sección 12.7.

Regla 1: Sumar y multiplicar por constantes

Sean dos funciones generatrices $f(x)$ y $g(x)$, asociadas a dos sucesiones de números, (a_n) y (b_n), respectivamente, y sean α y β dos números cualesquiera. Esta primera regla tiene que ver con los coeficientes de la función $\alpha f(x) + \beta g(x)$. No hay grandes sorpresas, son los que uno espera:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \longleftrightarrow (a_n)_{n=0}^{\infty} \\[1em] g(x) \longleftrightarrow (b_n)_{n=0}^{\infty} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \alpha f(x) + \beta g(x) \longleftrightarrow (\alpha\, a_n + \beta\, b_n)_{n=0}^{\infty}}$$

Así que al sumar (y/o multiplicar por constantes) funciones generatrices, estamos sumando (y/o multiplicando por constantes) las sucesiones asociadas. La prueba es trivial y queda como entretenimiento (ni siquiera ejercicio) para el lector.

Regla 2: Producto de funciones

La siguiente regla considera el producto puntual de dos funciones generatrices $f(x)$ y $g(x)$ asociadas a las sucesiones (a_n) y (b_n), respectivamente. Empezamos con las primeras manipulaciones:

$$f(x) \cdot g(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\, x^j \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_k\, b_j\, x^{k+j} \,.$$

Ahora viene el paso clave para la fórmula que presentaremos luego. Se trata de determinar el coeficiente n-ésimo de la serie de potencias $f(x)g(x)$. Obtendremos términos con x^n cuando los índices k y j sean tales que $k + j = n$. Y cada combinación de éstas contribuirá con el producto $a_k b_j$ correspondiente. Así que, si llamamos c_n a los coeficientes de $f(x)g(x)$, podemos escribir que

$$c_n = \sum_{k+j=n} a_k\, b_j \,.$$

En realidad es una suma doble, en los índices k y j; pero sólo sumamos aquéllos cuya suma valga n. Aún podemos reescribirla de forma más manejable. Miremos los primeros casos. Por ejemplo, para c_0, debemos considerar las maneras de escribir $k + j = 0$: sólo hay una, $k = 0$ y $j = 0$, así que $c_0 = a_0\, b_0$. Para el segundo coeficiente, c_1, ya hay más posibilidades: tendremos $k + j = 1$ cuando, o bien $k = 0$ y $j = 1$, o bien $k = 1$ y $j = 0$; es decir, $c_1 = a_0\, b_1 + a_1\, b_0$.

El lector ya podrá escribir el valor de c_2, listando, simplemente, los posibles pares (k, j) que cumplan que $k + j = 2$. Llegará así sin dificultad a que $c_2 = a_0\, b_2 + a_1\, b_1 + a_2\, b_0$.

Tras este análisis preliminar, la regla general es casi obvia:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}\,,$$

el llamado **producto de Cauchy**:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \longleftrightarrow (a_n)_{n=0}^{\infty} \\[2ex] g(x) \longleftrightarrow (b_n)_{n=0}^{\infty} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad f(x)\cdot g(x) \longleftrightarrow \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}\right)_{n=0}^{\infty}}$$

Interpretación combinatoria del producto de dos funciones generatrices

Imaginemos que tenemos objetos de dos tipos, A y B. Para cada n, hay a_n objetos de tipo A y tamaño n, mientras que existen b_n objetos de tipo B y tamaño n.

El objetivo es formar objetos de tamaño total n que estén formados por uno de tipo A y otro de tipo B. Para construirlos, aplicamos las reglas de la suma y del producto:

1. Llamamos k al tamaño del objeto de tipo A elegido. El parámetro k, por supuesto, se moverá entre 0 y n.
2. Elegimos el objeto de tipo A de tamaño k. Esto se podrá hacer de a_k formas.
3. Elegimos el objeto de tipo B, que tendrá que ser de tamaño $n - k$: se podrá hacer de b_{n-k} maneras.

En total, si llamamos c_n al número de objetos que podemos construir con esas características, se tendrá que

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}\,.$$

En términos de las funciones generatrices asociadas, si llamamos $f(x)$ y $g(x)$ a las funciones generatrices asociadas a las sucesiones (a_n) y (b_n), respectivamente, la función $f(x)g(x)$ será la función generatriz de los c_n. Para ilustrar esta interpretación, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 12.2.1 *En un consejo de administración hay 25 personas, de las que 11 son mujeres. Se quiere formar un comité con 10 personas.*

¿De cuántas formas se podrá hacer? La respuesta es inmediata: hay $\binom{25}{10}$ comités distintos.

Pero ahora vamos a contarlos *atendiendo al número de hombres y mujeres* que hay en ellos. En la terminología anterior, los objetos de tipo A serán las posibles selecciones de mujeres que forman parte del comité, y los de tipo B, las de hombres:

$$a_n = \#\left\{\begin{array}{c}\text{formas de escoger } n\\ \text{de entre las 11 mujeres}\end{array}\right\} = \binom{11}{n}, \quad b_n = \#\left\{\begin{array}{c}\text{formas de escoger } n\\ \text{de entre los 14 hombres}\end{array}\right\} = \binom{14}{n}.$$

Sus funciones generatrices asociadas son

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{11}{n} x^n = (1+x)^{11} \quad \text{y} \quad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{14}{n} x^n = (1+x)^{14}.$$

La respuesta que buscamos es el coeficiente c_{10} de la función $A(x)\,B(x)$, un coeficiente del que ya sabemos, por la regla 2, que vale $\sum_{j=0}^{10} \binom{11}{j}\binom{14}{10-j}$. Pero, además,

$$A(x)\,B(x) = (1+x)^{11}\,(1+x)^{14} = (1+x)^{25} \implies \text{Coef}_{10}\,[A(x)\,B(x)] = \binom{25}{10}.$$

Así que hemos probado que

$$\binom{25}{10} = \sum_{j=0}^{10} \binom{11}{j}\binom{14}{10-j}.$$

Y si generalizamos el argumento (con s mujeres, t hombres y un comité de n personas), tendremos una prueba, con funciones generatrices, de la *identidad de Vandermonde*,

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{s}{j}\binom{t}{n-j} = \binom{s+t}{n},$$

que ya ha aparecido en varias ocasiones (véanse las subsecciones 3.1.1 y 3.1.5). ♣

Regla 3: Desplazar coeficientes

En muchas ocasiones interesa considerar la sucesión de números que se obtiene de una dada desplazando los coeficientes hacia la derecha o hacia la izquierda. Consideremos la función generatriz $f(x)$ de una cierta sucesión (a_n). Si multiplicamos por x,

$$x\,f(x) = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n.$$

Es decir, el coeficiente n-ésimo de $xf(x)$ es el coeficiente $n-1$ de $f(x)$. Pero cuidado, sólo para $n \geq 1$, pues el coeficiente cero de $xf(x)$ es ahora 0:

$$xf(x) \quad \longleftrightarrow \quad (0, a_0, a_1, a_2, \dots).$$

Y si multiplicamos por una potencia mayor, x^m, con $m \geq 1$, desplazamos la sucesión hacia la derecha m posiciones y tendremos m ceros al principio. La regla general es

$$\boxed{f(x) \longleftrightarrow (a_n)_{n=0}^{\infty} \quad \implies \quad x^m\,f(x) \longleftrightarrow (0, 0, \overset{(m)}{\dots}, 0, a_0, a_1, a_2, \dots) = (a_{n-m})_{n=0}^{\infty}}$$

La última expresión es simplemente una notación que nos permite abreviar, en la que aplicamos el convenio de que si el índice del coeficiente es negativo, entonces el coeficiente vale cero.

El desplazamiento de coeficientes en el otro sentido requiere un análisis más cuidadoso. Por ejemplo, partimos de una sucesión $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ asociada a una función $f(x)$ y nos preguntamos por la función generatriz $g(x)$ asociada a la sucesión $(a_1, a_2, a_3, \dots)$. Obsérvese que los coeficientes b_n de esta nueva función vienen dados por $b_n = a_{n+1}$, para cada $n \geq 0$.

Primero, claro, hay que eliminar el coeficiente a_0, así que debemos considerar la función

$$f(x) - a_0 = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

Esto no es todavía $g(x)$, pues la función $f(x) - a_0$ está asociada a la sucesión[5] de números $(0, a_1, a_2, \dots)$.

La función que buscamos, $g(x)$, está asociada a $(a_1, a_2, a_3, \dots)$. Así que, con la regla de desplazamiento *hacia la derecha*, $xg(x)$ genera la sucesión $(0, a_1, a_2, a_3, \dots)$, que es, precisamente, $f(x) - a_0$. De manera que

$$xg(x) = f(x) - a_0 \quad \Longrightarrow \quad g(x) = \frac{f(x) - a_0}{x}.$$

¡Ay!, una x en el denominador, y se supone que esto es una serie de potencias centrada en el 0. Pero no debemos preocuparnos, porque la serie de la función $f(x) - a_0$ no tiene término independiente, así que al dividirla por x obtenemos una serie de potencias legal.

El caso general sigue los mismos argumentos. Dado $m \geq 1$, si $f(x)$ es la función generatriz de la sucesión (a_n), entonces

$$\boxed{\frac{f(x) - a_0 - a_1\, x - \cdots - a_{m-1}\, x^{m-1}}{x^m} \qquad \longleftrightarrow \qquad (a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots) = (a_{n+m})_{n=0}^{\infty}}$$

La operación del numerador sustituye los primeros m coeficientes por 0 y la "división" por x^m los elimina.

Resumimos las dos reglas de desplazamiento de coeficientes:

$$\begin{aligned} \operatorname{Coef}_n[f(x)] &= \operatorname{Coef}_{n+m}[x^m f(x)]\,, \\ (\text{si } n \geq m) \quad \operatorname{Coef}_n[f(x)] &= \operatorname{Coef}_{n-m}\left[\frac{f(x) - a_0 - a_1\, x - \cdots - a_{m-1}\, x^{m-1}}{x^m}\right]. \end{aligned}$$

Y, como ejemplo de aplicación, consideremos la función $1/(1-x)$, asociada a la sucesión $(1, 1, 1, \dots)$. Entonces,

$$\frac{x}{1-x} \longleftrightarrow (0, 1, 1, 1 \dots), \quad \frac{x^2}{1-x} \longleftrightarrow (0, 0, 1, 1, \dots), \quad \text{etc.}$$

Obsérvese que si desplazamos, por ejemplo, la sucesión hacia la izquierda tres posiciones, volvemos a tener la sucesión de unos. No hay problema, porque, como el lector podrá comprobar, la función

$$\frac{\frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2}{x^3} \qquad \text{vuelve a ser} \qquad \frac{1}{1-x}.$$

[5]Obsérvese que, de paso, hemos hallado una "regla" que permite sustituir un coeficiente cualquiera por 0. Aquí lo hemos hecho para el primer coeficiente, pero el lector podría reflexionar sobré cuál es la función generatriz de la sucesión en la que, por ejemplo, sustituimos el vigésimo coeficiente de la original por 0. . . La respuesta, claro, es $f(x) - a_{19}x^{19}$.

Regla 4: Derivar (y algo más)

Si tenemos una función $f(x)$ que genera unos ciertos (a_n), ¿qué función generará la sucesión $(n\, a_n)$? Buscamos una operación que, aplicada a $f(x)$, haga que sus coeficientes aparezcan multiplicados por la posición que ocupan. La estructura especial de las series de potencias nos hace sospechar que esa operación va a ser la derivación (o casi):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}\,.$$

Así que $f'(x)$ está asociada a la sucesión $(1a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$. Casi lo tenemos, salvo que el primer coeficiente debería ser $0a_0$. Así que debemos desplazar la sucesión hacia la derecha una posición, y esto ya lo aprendimos a hacer con la regla anterior:

$$x\, f'(x) \quad \longleftrightarrow \quad (0a_0, 1a_1, 2a_2, 3a_3, \dots) = (n\, a_n)_{n=0}^{\infty}$$

Si lo que queremos es obtener la función asociada a la sucesión $(n^2\, a_n)$, el mismo argumento, pero ahora aplicado a la función $x\, f'(x)$ (cuyos coeficientes son $n\, a_n$), nos lleva a que

$$x\, \big(x\, f'(x)\big)' \quad \longleftrightarrow \quad (n^2\, a_n)_{n=0}^{\infty}.$$

Y así podríamos seguir. Cada factor n extra en el coeficiente se obtiene repitiendo la operación. Por abreviar, llamemos $(x\, \mathrm{d}/\mathrm{d}x)$ al operador que actúa sobre una función derivándola primero y multiplicándola por x después. Entonces, si la potencia $(x\mathrm{d}/\mathrm{d}x)^m$ indica que hay que repetir m veces la operación, tenemos que, para cada $m \geq 1$,

$$\boxed{f(x) \longleftrightarrow (a_n)_{n=0}^{\infty} \quad \Longrightarrow \quad \left(x\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^m (f(x)) \longleftrightarrow (n^m\, a_n)_{n=0}^{\infty}}$$

Esta operación será especialmente interesante, por ejemplo, a la hora de calcular medias, algo que haremos varias veces más adelante, en especial en el capítulo 13. Por ahora, y como ilustración, veamos cuál es la función generatriz $f(x)$ de la sucesión de números $(0, 1, 2, 3, \dots)$. Sabemos que $1/(1-x)$ genera la sucesión $(1, 1, 1, \dots)$, así que no hay más que aplicarle esta regla para obtener lo que buscamos:

$$x \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2} \quad \longleftrightarrow \quad (0, 1, 2, 3, \dots)\,.$$

O, con más generalidad, podemos obtener la función generatriz de la sucesión de números $(0, d, 2d, 3d, 4d, \dots)$, la progresión aritmética que empieza en 0 y cuya diferencia es d:

$$\frac{d}{1-x} \quad \longleftrightarrow \quad (d, d, d, d, \dots) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x\, d}{(1-x)^2} \quad \longleftrightarrow \quad (0, d, 2d, 3d, \dots)$$

Con muy poco más de esfuerzo se puede comprobar que la función generatriz de una progresión aritmética general, que empiece en un cierto a y tenga diferencia d, es

$$\frac{a}{1-x} + \frac{x\, d}{(1-x)^2} = \frac{a + x\,(d-a)}{(1-x)^2} \quad \longleftrightarrow \quad (a, a+d, a+2d, a+3d, \dots)\,.$$

Regla 5: Integrar

Digamos que una cierta función $f(x)$ tiene como coeficientes a los números (b_n), que nos son desconocidos. Disponemos, sin embargo, de los coeficientes (a_n) de la función $f'(x)$. ¿Cómo podemos escribir los b_n en términos de los a_n? Obsérvese que

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,, \qquad \text{y también que} \qquad f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k x^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b_{n+1} x^n\,.$$

Sólo tenemos que igualar coeficientes en las dos expresiones de $f'(x)$ para obtener que $b_{n+1} = a_n/(n+1)$ para cada $n \geq 0$ y concluir que

$$\boxed{f'(x) \longleftrightarrow (a_n)_{n=0}^{\infty} \quad \Longrightarrow \quad f(x) \longleftrightarrow \left(b_0, \frac{a_0}{1}, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \dots\right)}$$

Obsérvese que el primer coeficiente de $f(x)$ queda sin determinar.

EJEMPLO 12.2.2 *Partimos de $f'(x) = 1/(1-x)$ y queremos conocer los coeficientes de $f(x)$.*

Los coeficientes de $f'(x)$ son todos 1, así que, siguiendo la regla de integración,

$$f(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n\,.$$

Por otro lado, las funciones $f(x)$ que verifican la ecuación diferencial $f'(x) = \frac{1}{1-x}$ vienen dadas por $f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) + C$, donde C es una constante. Si sustituimos en $x = 0$, obtenemos $C = f(0) = b_0$. Así que

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) \quad \longleftrightarrow \quad \left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)\,.$$

♣

Regla 6: Obtener sumas parciales

La función $1/(1-x)$, aquélla cuyos coeficientes son todos unos, es muy especial. Veamos el efecto que tiene, sobre los coeficientes de una cierta función $f(x)$, la multiplicación por la serie básica. Aplicamos, simplemente, la regla 2:

$$f(x)\,\frac{1}{1-x} = \sum_{s=0}^{\infty} a_s x^s \sum_{t=0}^{\infty} x^t = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) x^n\,.$$

Así que el coeficiente n-ésimo de la función $f(x)/(1-x)$ es la suma de los n primeros coeficientes de la función $f(x)$. El efecto de dividir por $1-x$ es que devuelve lo que llamaremos las **sumas parciales** de los coeficientes originales.

$$\boxed{f(x) \longleftrightarrow (a_n)_{n=0}^{\infty} \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(x)}{1-x} \longleftrightarrow (a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n=0}^{\infty}}$$

Ejemplo 12.2.3 *Calculemos de nuevo la suma de los primeros n números naturales.*

El resultado ya lo conocemos (véase, por ejemplo, el ingenioso argumento que expusimos en la página 42). Obtengámoslo con funciones generatrices. Sabemos que la función $x/(1-x)^2$ está asociada a los números $(0, 1, 2, 3, \dots)$. Es decir, que su coeficiente k-ésimo es, justamente, k. Esto lo obtuvimos utilizando la regla 4.

Ahora, con esta nueva regla, resulta que

$$\frac{1}{1-x}\,\frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^3} \quad\longleftrightarrow\quad \Big(\sum_{k=0}^{n} k\Big)_{n=0}^{\infty}$$

Así que la respuesta está en el coeficiente n-esimo de la función $x/(1-x)^3$. Conocemos (véase el ejemplo 12.1.1) los coeficientes de $(1-x)^{-3}$, así que sólo hay que utilizar la regla 3 para concluir que, si $n \geq 1$,

$$\text{Coef}_n\left[\frac{x}{(1-x)^3}\right] = \text{Coef}_{n-1}\left[\frac{1}{(1-x)^3}\right] = \binom{3+(n-1)-1}{3-1} = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

(también válido para $n = 0$). Análogos argumentos permiten obtener la suma de los primeros n cuadrados, cubos, etc. (véase el ejercicio 12.2.2, y también el 12.2.3). ♣

Ejemplo 12.2.4 *Consideremos los* ***números armónicos*** *H_n, dados, para cada $n \geq 1$, por*

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$$

Definimos $H_0 = 0$. Queremos encontrar la función generatriz de estos H_n.

Ya sabemos, del ejemplo 12.2.2, que

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \ln\Big(\frac{1}{1-x}\Big)$$

(obsérvese que el término independiente, el valor $g(0)$, es 0). Así que no hay más que aplicar la regla de las sumas parciales para obtener que la función generatriz de los números armónicos es

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n\, x^n = \frac{1}{1-x} \ln\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

♣

Regla 7: Eliminar coeficientes

Eliminar (esto es, sustituir por 0) algunos coeficientes de $f(x)$ es sencillo (véase la nota al pie de la página 894). En ocasiones es necesario eliminar un conjunto infinito de ellos, por ejemplo los coeficientes de índice par, para quedarnos con los de índice impar. O quizás nos interese rescatar únicamente los coeficientes cuyos índices sean, digamos, múltiplos de 5.

Veamos el primer caso: $f(x)$ es la función generatriz de una sucesión de números (a_n) y queremos quedarnos únicamente con los coeficientes de índice par. Si escribimos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\,, \quad \text{entonces} \quad f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(-1)^n x^n$$

Obsérvese que si $f(x)$ tiene sentido para un cierto x, es decir, si x está dentro del radio de convergencia, entonces $-x$ también lo estará y tendrá sentido hablar de $f(-x)$. Ahora, como el lector atento ya habrá imaginado, sumamos las dos series:

$$f(x) + f(-x) = (a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + \cdots) + (a_0 - a_1\,x + a_2\,x^2 - a_3\,x^3 + \cdots)\,.$$

Sólo sobreviven los términos de índice par (multiplicados por 2), así que

$$\frac{f(x)+f(-x)}{2} = \sum_{n \text{ par}} a_n\,x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}\,x^{2k}\,.$$

Ya podemos escribir la regla correspondiente:

$$\boxed{f(x) \longleftrightarrow (a_n)_{n=0}^{\infty} \implies \frac{f(x)+f(-x)}{2} \longleftrightarrow (a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, a_6, 0, \dots)}$$

De manera análoga, si restamos ambas series, seleccionaremos los términos de índice impar (que aparecerán también multiplicados por 2), así que

$$\boxed{f(x) \longleftrightarrow (a_n)_{n=0}^{\infty} \implies \frac{f(x)-f(-x)}{2} \longleftrightarrow (0, a_1, 0, a_3, 0, a_5, 0, \dots)}$$

Seleccionar los términos cuyos índices son múltiplos de 3 ó de 4, o en general de un cierto entero, es algo más complicado, y requiere entender esta series de potencias en el contexto de la variable compleja (véase el ejercicio 12.2.4).

Un asunto algo más delicado es formar la función generatriz $g(x)$ cuyos coeficientes son, digamos, los de índice par de la $f(x)$ (sin los ceros intermedios). Empecemos, por ejemplo, con la función generatriz de los números de Fibonacci,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}\,.$$

Primero, escribimos la función generatriz de la sucesión $(F_0, 0, F_2, 0, F_4, 0, \dots)$:

$$g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = \frac{1}{2}\Big[\frac{x}{1-x-x^2} + \frac{-x}{1+x-x^2}\Big] = \frac{x^2}{1-3x^2+x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n} x^{2n}\,.$$

Nótese que $g(x)$ es, en realidad, una función de x^2, y que en su desarrollo en serie de potencias sólo aparecen potencias del tipo x^{2n}. Finalmente, definimos la función $h(x)$ mediante $h(x^2) = g(x)$ (es decir, cambiamos x^2 por x en la fórmula de g) para obtener que

$$h(x) = \frac{x}{1-3x+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n} x^n$$

está asociada a la sucesión $(F_0, F_2, F_4, \dots)$. El lector podrá encontrar la versión general de este procedimiento en el ejercicio 12.2.4.

Regla 8: Composición

Partimos de dos funciones generatrices, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, y tratamos de calcular los coeficientes de su composición

$$f(g(x)) = f \circ g(x)\,.$$

En lo que sigue, necesitaremos efectuar este tipo de operaciones en varias ocasiones (por ejemplo, en la subsección 12.5.3 y en la sección 13.2). Pero advertimos al lector de que se trata de una operación que no siempre está bien definida, ni desde el punto de vista analítico, ni siquiera desde el punto de vista de las series formales. Porque, si el lector se entretiene comprobando los detalles (como sugerimos hacer en el ejercicio 12.7.7), los coeficientes de la serie de potencias resultante no tienen por qué estar bien definidos, y resulta imprescindible añadir algunas condiciones adicionales.

Afortunadamente, en los usos que aquí veremos, estaremos en las condiciones que justifican estos manejos, que ilustramos ahora con dos ejemplos.

Ejemplo 12.2.5 *Partimos de una función generatriz $f(x)$, asociada a la sucesión (a_n), y tomamos $g(x) = x/(1-x)$. Queremos describir los coeficientes de la función $f(g(x)) = f(x/(1-x))$.*

Vamos a calcular, por comodidad, una pequeña variación, como es

$$\frac{1}{1-x}\, f\Big(\frac{x}{1-x}\Big)\,.$$

Procedemos formalmente, sustituyendo una función en la otra e intercambiando los índices de sumación:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} f\Big(\frac{x}{1-x}\Big) &= \frac{1}{1-x}\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{(1-x)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+k}{k} x^m \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k+m=n} \binom{m+k}{k} a_k \Big) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \Big) x^n\,.\end{aligned}$$

Los coeficientes que se obtiene son sumas parciales de los a_n originales, pero ponderadas con coeficientes binómicos. Ya tenemos una nueva regla:

$$\boxed{f(x) \longleftrightarrow (a_n)_{n=0}^{\infty} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{1-x} f\left(\frac{x}{1-x}\right) \longleftrightarrow \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \right)_{n=0}^{\infty}}$$

Nótese que los coeficientes de esta composición son sumas *finitas*. Apliquemos esta regla a la función generatriz de los números de Fibonacci:

$$\text{si} \quad f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}\,, \qquad \text{entonces} \qquad \frac{1}{1-x} f\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{x}{1-3x+x^2}\,,$$

como podrá comprobar el lector sustituyendo una función en la otra y simplificando.

Los coeficientes de esta función son, por la regla que acabamos de exponer, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k$. Pero, como vimos en la Regla 7, son también los números F_{2n}. De esta manera probamos que

$$F_{2n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k \qquad \text{para cada } n \geq 0$$

(más adelante, en la subsección 12.5.2, insistiremos en el uso de las funciones generatrices para la verificación de identidades).

EJEMPLO 12.2.6 *La función generatriz $f(x)$ está asociada a la sucesión (a_n), y ahora tomamos $g(x) = 1 + x$. Queremos describir los coeficientes de la función $f(g(x)) = f(1 + x)$.*

Procedemos formalmente, intercambiando los índices de sumación:

$$f(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(1+x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}a_k\right]x^n .$$

Así llegamos a otra nueva "regla":

$$\boxed{f(x) \longleftrightarrow (a_n)_{n=0}^{\infty} \quad \Longrightarrow \quad f(1+x) \longleftrightarrow \left(\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}a_k\right)_{n=0}^{\infty}}$$

Pero, ¡atención!, a diferencia del caso anterior, los coeficientes de $f(1 + x)$ son ahora sumas *infinitas*, y por tanto no está claro si están bien definidos o no (dependerá de los a_n que consideremos). Si, por ejemplo, $f(x)$ es un polinomio, la lista de coeficientes a_n es finita y tendrá sentido definir esta composición.

Si al lector le intriga este diferente comportamiento, puede revisar el ejercicio 12.7.7, donde descubrirá que la sustitución tiene sentido si $g(0) = 0$ (como ocurría para el caso de $g(x) = x/(1 - x)$. Para una función como $g(x) = 1 + x$ (para la que $g(0) \neq 0$), deberemos exigir condiciones adicionales a los a_n.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 12.2

12.2.1 *Si $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ son las funciones generatrices de las sucesiones (a_n), (b_n) y (c_n), respectivamente, ¿cuáles son los coeficientes de la función $f(x)g(x)h(x)$? Si $m \geq 1$, ¿cuáles son los coeficientes de la función $f^m(x)$?*

12.2.2 *Compruébese, utilizando las reglas 4 y 6, que*

$$\frac{x+x^2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n \qquad \text{y que} \qquad \frac{x+x^2}{(1-x)^4} = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} k^2\Big)x^n .$$

Calcúlense los coeficientes de la función de la derecha para comprobar que que la suma de los primeros n cuadrados vale $n(n+1)(2n+1)/6$. Constrúyase también el argumento que permite evaluar la suma de los primeros n cubos.

12.2.3 *Considérense las dos funciones*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \qquad y \qquad g(x) = \sum_{k=1}^{n} k\, x^k\,.$$

Compruébese que $g(x) = xf'(x)$. Obsérvese que $g(1) = f'(1)$ nos da el valor de la suma de los n primeros números naturales. Calcúlese $f'(1)$, derivando directamente en la fórmula de $f(x)$ (y aplicando dos veces la regla de L'Hôpital). Constrúyase un argumento similar para comprobar que la suma de los primeros n cuadrados vale $n(n+1)(2n+1)/6$.

12.2.4 ***Selección de coeficientes con índices múltiplos de un entero.*** *Ya hemos visto que si $f(x)$ es la función generatriz de la sucesión (a_n), entonces $g(x) = (f(x) + f(-x))/2$ genera la sucesión $(a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, a_6, \dots)$. Descubriremos en este ejercicio cómo hallar la función generatriz de la sucesión en la que sólo aparecen los términos de índice múltiplo de un cierto N, para lo que usaremos algunas propiedades de las raíces N-ésimas de la unidad.*

(a) Compruébese (a mano) que

$$g(x) = \frac{f(x) + f(ix) + f(-x) + f(-ix)}{4} \qquad \text{genera la sucesión} \qquad (a_0, 0, 0, 0, a_4, 0, 0, 0, a_8, 0, \dots).$$

(b) Dado $N \geq 2$, consideramos las raíces N-ésimas de la unidad, $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{N-1}$, con $\omega = e^{2\pi\, i/N}$, que cumplen que

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} (\omega^j)^t = \begin{cases} 0 & \text{si } t \text{ no es múltiplo de } N; \\ 1 & \text{si } t \text{ es múltiplo de } N \end{cases}$$

(véase la página 32). Utilícese esto para comprobar que si $f(x)$ genera la sucesión (a_n), entonces

$$g(x) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f(\omega^j\, x) \qquad \text{genera la sucesión} \qquad (a_0, 0, \dots, 0, a_N, 0, \dots, 0, a_{2N}, 0, \dots).$$

(c) Obsérvese que la función $g(x)$ definida en el apartado anterior es una serie de potencias de x^N. Verifíquese, finalmente, que la función $h(x)$ definida a través de $h(x^N) = g(x)$ genera la lista de coeficientes $(a_0, a_N, a_{2N}, a_{3N}, \dots)$.

12.2.5 *Recordando que la función e^x genera la sucesión $(1/n!)$, y utilizando el ejercicio 12.2.4, obténganse fórmulas explícitas de las funciones generatrices de las sucesiones*

$$\Big(0, 1, 0, \frac{1}{3!}, 0, \frac{1}{5!}, 0, \frac{1}{6!}, 0, \dots\Big) \qquad y \qquad \Big(1, 0, 0, 0, \frac{1}{4!}, 0, 0, 0, \frac{1}{8!}, 0, \dots\Big)$$

12.2.6 *La función $x/(1 - x - x^2)$ genera los números de Fibonacci (F_n). Utilícese el ejercicio 12.2.4 para comprobar que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n}\, x^{2n} = \frac{x^2}{1 - 3x^2 + x^4} \qquad \text{y que} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+1}\, x^{2n+1} = \frac{x(1-x^2)}{1 - 3x^2 + x^4}$$

y para verificar que las funciones generatrices de las sucesiones $(F_0, F_2, F_4, \dots)$ y $(F_1, F_3, F_5, \dots)$ son

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n}\, x^n = \frac{x}{1 - 3x + x^2} \qquad \text{y que} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+1}\, x^n = \frac{1-x}{1 - 3x + x^2}$$

12.3. Series de potencias y funciones generatrices

La relación de listas de números con funciones

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} \quad \longleftrightarrow \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

es un camino de ida y vuelta. Si tenemos la sucesión (a_n), nos interesa codificarla con su *función* generatriz

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \, .$$

Se trata de una función, de una serie de potencias, que, a veces, podemos considerar como un objeto puramente algebraico. El camino de vuelta también es relevante: en ocasiones partiremos de una función $f(x)$ que querremos desarrollar (si es que se puede) en serie de potencias, un desarrollo que será válido en un cierto intervalo centrado en el origen.

Nos interesan las dos direcciones. Porque aunque empecemos con (a_n) y le asociemos su función generatriz $f(x)$ para tener toda la sucesión codificada, luego, una vez reconocida $f(x)$, querremos desarrollarla en serie de potencias para así obtener propiedades (fórmula, comportamiento asintótico) de los a_n.

En este proceso resulta muy útil conocer la versión analítica de la teoría de las series de potencias, a la que vamos a dedicar esta sección. Estudiaremos, por un lado, las propiedades que tienen las series de potencias en cuanto funciones (subsección 12.3.1). Por otro, repasaremos las diversas herramientas de que disponemos para obtener el desarrollo en serie de potencias de una *función* $f(x)$: empezaremos, en la subsección 12.3.2, con un recordatorio de ciertas cuestiones de representabilidad en serie de potencias. En la subsección 12.3.3 describiremos el método de las fracciones simples, que quizás sea ya familiar al lector, y que es especialmente útil a la hora de desarrollar funciones racionales. En la subsección 12.3.4 nos ocuparemos de la otra gran familia de funciones de interés, la relacionada con la serie geométrica y el teorema del binomio. Por último, la subsección 12.3.5 constituirá, o al menos así lo esperamos, un puro divertimento para el lector: se trata de analizar los maravillosos argumentos que desarrolló Euler para sumar los inversos de los cuadrados.

12.3.1. Series de potencias como funciones

Consideramos la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n \, ,$$

una serie de potencias centrada en cero, donde (a_n) es una cierta sucesión de números y x es la variable[6]. Se trata de una suma de infinitas funciones (a_0 más $a_1 \, x$, más $a_2 \, x^2$, etc.), y como tal proceso infinito, hay que entenderlo en el sentido del límite. El que una expresión así tenga sentido dependerá, tanto de los coeficientes a_n, como de los valores de x que consideremos.

[6]Tanto los coeficientes como la variable pueden ser números complejos, aunque casi siempre serán para nosotros números reales.

A. Radio de convergencia

Dada una serie numérica infinita del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, decimos que la serie **converge** si $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n$ existe y es finito. Y decimos que la serie converge **absolutamente** si $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} |a_n| < +\infty$. Fijémonos en que, al introducir el valor absoluto, la convergencia de la serie depende sólo del tamaño de los coeficientes (del ritmo con el que decrecen a 0 cuando $n \to \infty$), y perdemos posibles cancelaciones que pudieran ayudar en la convergencia de la serie original. Por eso, si una serie converge absolutamente, entonces también converge en el sentido ordinario. Pero el recíproco no es cierto en general. El ejemplo más simple es el de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

La de la izquierda, la serie armónica, diverge. La de la derecha, sin embargo, converge (obtendremos su valor en el ejercicio 12.3.8). Esto es una consecuencia directa del siguiente resultado sobre series alternadas, que ya hemos utilizado alguna vez en capítulos anteriores:

Teorema 12.1 *Sea (a_n) una sucesión decreciente de términos no negativos, $a_0 \geq a_1 \geq \cdots \geq 0$. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge. Y el error cometido al truncar la serie en un cierto término está controlado por el tamaño del primer término despreciado:*

$$\Big|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n - \sum_{n=0}^{t}(-1)^n a_n\Big| \leq a_{t+1}\,.$$

Son parte de cualquier curso de Cálculo los criterios de convergencia de series numéricas. Por ejemplo, el **criterio del cociente** nos dice que si el límite

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

existe (puede ser infinito), entonces la serie $\sum a_n$ converge si $\rho < 1$ y diverge si $\rho > 1$. En el caso $\rho = 1$, este criterio no decide y podemos tener convergencia o divergencia. Por ejemplo, obtenemos $\rho = 1$ al aplicar este criterio a las series con $a_n = 1/n$ y $a_n = 1/n^2$. Y mientras que la serie armónica diverge, la suma de los inversos de los cuadrados, como veremos en la subsección 12.3.5, vale $\pi^2/6$.

El **criterio de la raíz** es semejante: ahora el límite que interesa calcular es

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,.$$

Si $\rho < 1$, la serie converge, y divergerá si $\rho > 1$. De nuevo, $\rho = 1$ no nos dice nada.

Supongamos que tenemos una serie de potencias $\sum_n a_n\, x^n$ y que conocemos el valor ρ del límite del criterio del cociente para la serie numérica asociada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, Entonces podríamos intentar aplicar el criterio del cociente a los números que sumamos en la serie de potencias:

$$\left|\frac{a_{n+1}\, x^{n+1}}{a_n\, x^n}\right| = |x| \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow{n\to\infty} |x|\,\rho\,.$$

Así que cuando $|x| < \rho$, la serie de potencias convergerá; y divergerá si $|x| > \rho$ (el mismo argumento valdría si el ρ fuera el del criterio de la raíz).

De manera más formal, una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ tiene asociado un número R (entre 0 e ∞), su **radio de convergencia**, que se calcula de la siguiente manera[7]:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,.$$

Una vez calculado el radio de convergencia R, la serie de potencias converge absolutamente para los valores de x en el intervalo[8] $|x| < R$, diverge si $|x| > R$; y en $|x| = R$ podemos tener convergencia y/o divergencia.

B. Derivadas

Así que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es una función bien definida en el intervalo $(-R, R)$. Pero más aún, la serie **converge uniformemente** en cualquier intervalo cerrado contenido estrictamente en $(-R, R)$. Sin entrar en más detalles[9], esto supone que la función $f(x)$ se puede diferenciar indefinidamente, y que esas derivadas vuelven a ser series de potencias de nuevo definidas en el intervalo $(-R, R)$. La derivada se obtiene, simplemente, derivando término a termino:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad \text{para } x \in (-R, R).$$

C. Comportamiento en los extremos del intervalo de convergencia

La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ define una función en el intervalo $(-R, R)$, dado por su radio de convergencia R. Es un intervalo abierto; nada se dice del comportamiento en los extremos de ese intervalo.

La serie geométrica es un buen ejemplo de ello. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ coincide con $1/(1-x)$ en el intervalo $(-1, 1)$. En $x = -1$, $1/(1-x)$ vale $1/2$, pero la serie no converge. En $x = 1$, la función $1/(1-x)$ no está definida; pero si nos aproximamos a 1 desde la región de convergencia $(-1, 1)$, tiende a ∞, mientras que la serie también diverge a ∞.

Vamos a ver a continuación cómo la convergencia de la serie numérica que se obtiene al sustituir $x = R$ (o, análogamente, $x = -R$) en la serie de potencias nos dice que la función está *adecuadamente* definida por la serie en ese punto. En realidad, podemos restringirnos al caso en el que el radio de convergencia es $R = 1$ y bastará analizar la sustitución en $x = 1$ (el lector podrá comprobarlo completando los detalles del ejercicios 12.3.7).

Antes de tratar el caso general, estudiaremos el caso particular en los coeficientes sean no negativos, porque es más sencillo y tiene peculiaridades interesantes.

[7] Es, esencialmente, el criterio de la raíz (aunque también podríamos emplear una versión con el criterio del cociente, véase el ejercicio 12.3.2). El símbolo lím sup es el límite superior de una sucesión, una cantidad que, a diferencia de los límites ordinarios, siempre existe (aunque cuando el límite ordinario existe, coincide con el límite superior). Más sobre radios de convergencia y comportamiento de los coeficientes, en la sección 14.3.

[8] En la versión compleja, la región de convergencia no es un intervalo, sino un disco centrado en el origen.

[9] El lector sabrá, sin duda, de las sutilezas que encierra la noción de convergencia uniforme.

C.1) Términos no negativos: continuidad en $x = 1$

En muchas de las aplicaciones de las funciones generatrices, los coeficientes de las series de potencias serán no negativos. Dos ejemplos: en los problemas de recuento, los a_n no sólo son no negativos, sino además enteros; en las funciones generatrices de probabilidad, que veremos en el capítulo 13, los a_n serán números no negativos cuya suma vale 1.

El interés de la cuestión, como ejemplificamos más adelante y en algún ejercicio, es el siguiente: queremos sumar $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Para ello, formamos la función generatriz

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

hallamos una expresión analítica para $f(x)$ y luego calculamos $\lim_{x\uparrow 1} f(x)$. El resultado es la suma deseada.

Por su utilidad y uso frecuente, vamos a considerar en este apartado el caso particular en que además de ser no negativos, los a_n cumplen[10] que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty\,.$$

En este caso, el análisis de la convergencia es directo, porque si $|x| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n\, x^n| < \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty\,.$$

Así que la serie de potencias converge absolutamente para $|x| < 1$; esto es, su radio de convergencia será, al menos, 1.

Observemos que $f(x)$ está definida por la serie en $(-1, 1)$. Pero, en este caso, además podemos sustituir $x = 1$ en la serie de potencias y "definir" $f(1)$ mediante $f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Ahora nos preguntamos por la relación entre estas dos definiciones de $f(x)$: la obtenida en $(-1, 1)$ (a través de la serie de potencias) y la definición en $x = 1$ que hemos hecho hace un momento. O, en términos más técnicos: ¿es $f(x)$ continua (por la izquierda) en $x = 1$?

Comprobémoslo. Para empezar,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \ge \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = f(x)\,, \qquad \text{en } 0 < x < 1,$$

porque en la segunda suma multiplicamos cada término (positivo) por el x^n correspondiente, que es siempre < 1. Además, $f(x)$ es una función que crece con x. Así que existirá el límite cuando $x \uparrow 1$ y cumplirá que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \ge \lim_{x\uparrow 1} f(x)\,.$$

[10] El resultado que aquí vamos a obtener aquí (caso de coeficientes no negativos) es también cierto incluso si la serie numérica diverge a $+\infty$ (véase el lema 13.2).

Por otra parte, como todos los términos son positivos,

$$\lim_{x\uparrow 1} f(x) = \lim_{x\uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \geq \lim_{x\uparrow 1} \sum_{n=0}^{N} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{N} a_n\,.$$

Y esto para cada N que consideremos. De estas dos observaciones deducimos que

$$\lim_{x\uparrow 1} f(x) = \lim_{x\uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,.$$

C.2) El Lema de Abel

La continuidad vista anteriormente es general; éste es el contenido del siguiente resultado[11], que ennoblecemos con el nombre de Abel[12]:

Figura 12.1: Abel

Lema 12.2 (Abel) *Si la serie de potencias* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *tiene radio de convergencia* 1 *y la serie numérica* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge, entonces*

$$\lim_{x\uparrow 1} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,.$$

Dejamos la demostración como ejercicio para el lector (véase el ejercicio 12.3.6) y nos dedicamos a ilustrarlo con la siguiente aplicación.

Ejemplo 12.3.1 *Calculemos el valor de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)}$.

El método habitual de cálculo parte de la siguiente observación:

$$\frac{1}{n\,(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \qquad \text{para cada } n \geq 1,$$

[11]Que conviene poner en perspectiva. Abel estaba interesado en dar sentido a sumas del tipo $\sum_n a_n$ mediante el $\lim_{x\to 1} \sum_n a_n x^n$. Si este último límite existe, se dice que la serie original es *sumable Abel.* Este método de sumación permite, por ejemplo, decidir que $\sum_n (-1)^n$ (una serie en principio divergente) se pueda interpretar como $\lim_{x\to 1} \sum_n (-1)^n x^n = \lim_{x\to 1} 1/(1+x) = 1/2$. Lo que el lema 12.2 asegura es que si $\sum_n a_n$ *ya* es convergente, entonces también es sumable Abel (y el resultado de ambos procesos de sumación coinciden). El ejemplo $\sum_n (-1)^n$ nos muestra que el camino contrario, el que nos aseguraría que si una serie es sumable Abel, entonces es también convergente, no es cierto en general. Para que lo sea, es necesario imponer ciertas condiciones a los coeficientes (los resultados correspondientes son conocidos como teoremas tauberianos).

[12]La historia de Niels Henrik Abel (1802-1829), nacido en Noruega (entonces parte del reino danés), es una de las más tristes de las Matemáticas. Una vida marcada por los problemas económicos, de salud y también por la mala suerte, que le acompañaría hasta su temprana muerte por tuberculosis. Parece ser que envió a Gauss sus trabajos sobre la imposibilidad de resolver la ecuación quíntica por radicales, pero éstos aparecerían sin abrir tras la muerte del genio de Göttingen. También una famosa memoria sobre integrales elípticas que envió a la Academia de Paris fue extraviada y encontrada posteriormente por Cauchy. Se cuenta que, dos días después de la muerte de Abel, se escribieron dos cartas para él: en una de ellas se le comunicaba la aparición del tratado en la Academia de Paris. En la otra, Crelle, en cuya revista publicó Abel gran parte de sus trabajos, le confirmaba que le había conseguido un puesto permanente en Berlin. En el año 2002, el Gobierno noruego instituyó el Premio Abel, que pretende ser un equivalente al Premio Nobel para las Matemáticas (campo en el que, hasta ahora, sólo las Medallas Fields tenían un rango semejante). El lector interesado puede consultar la semblanza de Abel titulada *El Newton del Norte* (La Gaceta de la RSME **5** (2002), no. 1), escrita en 1910 nada menos que por José Echegaray, matemático español y Premio Nobel... aunque de Literatura, claro.

que nos basta para obtener el resultado deseado:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,(n+1)}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\right)$$
$$=\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{1}{N+1}\right)=1\,.$$

El enfoque alternativo, que utiliza funciones generatrices, comienza escribiendo

$$\alpha(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,(n+1)}\,x^{n+1}=\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\cdots\,,$$

que es una serie de potencias con coeficientes positivos que tendrá sentido y podrá ser derivada en $|x|<1$. Derivando dos veces,

$$\alpha'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,x^n=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\,,\qquad \alpha''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}\,.$$

Una vez que hemos conseguido sumar la serie de potencias de $\alpha''(x)$, integrando una vez obtenemos que

$$\alpha'(x)=\ln\frac{1}{1-x}$$

(la constante de integración es cero, porque $\alpha'(0)=0$). Integrando de nuevo, y recordando que $\alpha(0)=0$, obtenemos

$$\alpha(x)=(1-x)\,\ln(1-x)+x\,.$$

El lema de Abel, aplicado a $\alpha(x)$, nos asegura que

$$\lim_{x\uparrow 1}\alpha(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,(n+1)}\,.$$

Sólo queda, y es un ejercicio sencillo de Cálculo, obtener el límite cuando $x\uparrow 1$ de $\alpha(x)=(1-x)\,\ln(1-x)+x$; ese límite resulta valer 1. ♣

12.3.2. Funciones como series de potencias

Una función $f(x)$ definida e infinitamente derivable en un intervalo $(-D,D)$ alrededor del origen se dice *representable en serie de potencias* (en un intervalo $(-E,E)$, no necesariamente el anterior) si

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,x^n\qquad\text{para todo } x\in(-E,E).$$

Como la serie converge en $(-E,E)$, el radio de convergencia R será $\geq E$. Derivando término a término, obtenemos que

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,,$$

así que la serie de potencias es, precisamente, la serie de Taylor de $f(x)$ en el 0. La representación, si es válida, es única.

Pero el asunto es más delicado de lo que pudiera parecer. Supongamos que partimos, como parece razonable, de una función $f(x)$ definida e infinitamente derivable en un cierto intervalo $(-D,D)$. Podemos formar, entonces, la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n\,.$$

Nos preguntamos si esta serie de potencias converge en algún punto además, claro, de en $x=0$. Y en el caso de que haya convergencia en un cierto valor de x, si la suma de la serie coincide con $f(x)$.

Por ejemplo, podemos considerar la función $f(x) = 1/(1+x^2)$, que es infinitamente derivable en todo $x \in \mathbb{R}$. La serie de Taylor asociada es

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}\,.$$

Ahora bien, el radio de convergencia de esta serie es $R=1$. ¿Cuál es la razón por la que la serie representa a una función tan magnífica como $f(x)$ *sólo* en el intervalo $(-1,1)$? De nuevo, la respuesta hay que buscarla en los números complejos. El denominador de $f(x)$ se anula en i y $-i$, así que, vista como una función compleja, la serie de potencias converge en el disco de radio 1.

Más sorprendente es el caso de la función $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ y $f(0)=0$. El lector podrá comprobar que $f^{(n)}(0)=0$ para todo n, así que la serie de Taylor asociada es idénticamente nula. Y claro, sólo representa a $f(x)$ en $x=0$. En la terminología de antes, $D=R=\infty$ (la función es infinitamente derivable en todo x, y la serie de Taylor converge para todo x), pero $E=0$ (la serie de Taylor sólo representa a la función en $x=0$).

Así que hay que exigirle más a la función. Por ejemplo, condiciones sobre el tamaño de la función y sus derivadas. Una ilustración de esto es lo siguiente: si existe una constante $A>0$ tal que $|f^{(n)}(x)| \leq A^n$ para todo n y para todo x en un cierto entorno de $x=0$, entonces la serie de Taylor representa a la función en ese entorno.

Afortunadamente, en la práctica nuestras funciones serán cocientes de polinomios, o variaciones sobre series de potencias ya conocidas, y las cuestiones de representabilidad serán sencillas. Por ejemplo, un resultado que utilizaremos (implícitamente) en muchas ocasiones es el siguiente:

Teorema 12.3 *Si $f(x)$ es representable en serie de potencias en $(-R,R)$ y $f(0)\neq 0$, entonces la función $1/f(x)$ es representable en serie de potencias en un cierto intervalo $(-R',R')$.*

Reflexionemos sobre lo que supone esto. Tenemos una cierta sucesión de números, una serie formal f; pero, además, la serie de potencias que con ellos formamos representa a una cierta *función* $f(x)$. Desde el punto de vista formal, podríamos calcular la sucesión de números correspondiente a la recíproca $1/f$. Lo que aquí se afirma es que una serie de potencias asociada a esa nueva sucesión converge en $(-R',R')$. Y con eso basta: no puede converger a otra cosa que a la *función* $1/f(x)$.

12.3.3. Desarrollo en serie de potencias de cocientes de polinomios

En muchas ocasiones nos enfrentaremos con el problema de obtener la serie de potencias asociada a un cociente de polinomios

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P(x)\,\frac{1}{Q(x)}\,.$$

El que esta función es representable en serie de potencias es justo lo que acabamos de ver. Lo que nos interesa ahora es *cómo* obtener ese desarrollo.

En realidad, podríamos limitarnos a desarrollar $1/Q(x)$. Una vez hecho, multiplicarla por $P(x)$ no consistirá más que en aplicar, las veces que sea necesario, las reglas de manipulación de funciones generatrices (suma de funciones, desplazamiento de coeficientes, multiplicación por constantes) que aprendimos en la sección 12.2.

Pero claro, tenemos el Teorema Fundamental del Álgebra (teorema 4.44), que nos dice que si el polinomio $Q(x)$ tiene grado k, entonces podemos escribir que

$$\frac{1}{Q(x)} = \frac{C}{(x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_t)^{r_t}}\,,$$

donde C es una cierta constante, los α_j son las raíces (en principio, complejas) de $Q(x)$ y los r_j son las multiplicidades correspondientes. La suma $r_1+\cdots+r_t$ es justamente k.

Conocemos, por otro lado, los desarrollos en serie de potencias de

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n\,, \qquad \frac{1}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+m}{m}x^n\,, \qquad \text{para } m\geq 1.$$

(desde el punto de vista analítico, estas identidades son ciertas si $|x|<1$, como prueba, por ejemplo, el criterio del cociente). Manipulando estas expresiones, algo que dejamos como ejercicio al lector, podemos obtener los desarrollos de las siguientes funciones: si $a\neq 0$ y b son dos ciertas constantes,

$$\frac{1}{a+bx} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,b^n}{a^{n+1}}\,x^n\,, \qquad \frac{1}{(a+bx)^{m+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+m}{m}\frac{(-1)^n\,b^n}{a^{n+m+1}}\,x^n\,, \qquad \text{para } m\geq 1$$

(¿donde convergen estas series de potencias?). Como veremos en la subsección siguiente, todas estas series son miembros de una “familia” mucho más numerosa.

Vista la versatilidad de la serie básica, observamos que si consiguiéramos reescribir la expresión que obtuvimos antes para $1/Q(x)$ como una *suma* de términos del tipo

$$\frac{1}{(x-\alpha_j)}\,, \quad \text{o bien} \quad \frac{1}{(x-\alpha_j)^2}\,, \quad \text{o quizás} \quad \frac{1}{(x-\alpha_j)^3}\,, \quad \text{etc.},$$

incluso permitiendo la presencia de términos polinómicos en el numerador, el cálculo de la serie de potencias de $1/Q(x)$ sería sencillo. Esto es lo que justifica el método de fracciones simples que pasamos a explicar.

El método de fracciones simples

El objetivo[13] es desarrollar en serie de potencias una función racional del tipo

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad \text{donde } P(x) \text{ y } Q(x) \text{ son ciertos polinomios.}$$

Primero, podemos suponer que el grado del polinomio del numerador es menor que el del denominador, pues si no fuera así dividiríamos un polinomio por otro y llegaríamos a una expresión del tipo

$$T(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

donde $R(x)$ ya es un polinomio de grado menor que el de $Q(x)$. Los coeficientes del polinomio $T(x)$ habría que tenerlos en cuenta, por supuesto: si tiene grado digamos k, influirían en los primeros k coeficientes de la función. Por ejemplo,

$$\frac{x^3+1}{x^2+x+1} = (x-1) + \frac{2}{x^2+x+1},$$

y sólo restaría desarrollar en serie el segundo término (recordando que el término $x-1$ habría de ser tenido en cuenta al final).

Supongamos entonces que estamos con $P(x)/Q(x)$, y que el grado de $Q(x)$ es mayor que el de $P(x)$. El primer paso es encontrar las raíces del polinomio del numerador, esto es, las soluciones de $Q(x) = 0$. Sabemos bien que esto puede resultar complicado, y que no hay fórmulas explícitas si el polinomio es de grado alto. Pero supongamos que las soluciones son los números α_i (con multiplicidades r_i). Podremos entonces escribir la función racional como

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C\,\frac{P(x)}{(x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_t)^{r_t}}.$$

La constante C no desempeña papel alguno en el estudio que estamos haciendo (aunque a la hora del cálculo habrá que tenerla en cuenta, por supuesto), así que supongamos que es 1. El método de las fracciones simples consiste en reescribir la expresión anterior como

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_t)^{r_t}} = \sum_{i=1}^{t}\left[\frac{A_{i,1}}{(x-\alpha_i)} + \frac{A_{i,2}}{(x-\alpha_i)^2} + \cdots + \frac{A_{i,r_i}}{(x-\alpha_i)^{r_i}}\right],$$

donde los $A_{i,j}$ son constantes que hay que determinar. Hay varias maneras de hacer esto, pero quizás la más sencilla es la de sumar los términos del miembro de la derecha: en el denominador nos volverá a quedar $Q(x)$ y entonces bastará igualar los numeradores. De ahí obtendremos un sistema de ecuaciones lineales que nos darán el valor de las incógnitas $A_{i,j}$. Una vez determinados los valores de estos números, todo lo que nos queda son funciones que sabemos desarrollar: de la serie geométrica y su familia.

[13]Quizás el lector esté familiarizado con el uso de este método para integrar una función racional $P(x)/Q(x)$, reescribiéndola como suma de términos con denominadores de la forma $(ax+b)^n$, o de la forma $(ax^2+bx+c)^n$, porque las integrales asociadas son inmediatas, en términos de la función logaritmo o la función arcotangente. En nuestro análisis nos limitaremos al primer tipo, pero a cambio deberemos manejar números complejos.

Nótese que en todos estos argumentos, estamos dándonos la licencia de entender las series de potencias como funciones de variable compleja; y los coeficientes que obtendremos al final del desarrollo serán, en general, combinaciones de números complejos.

Veamos un ejemplo, algo complicado de cálculo, pero suficientemente ilustrativo:

Ejemplo 12.3.2 *Queremos desarrollar en serie de potencias la función racional*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^5 + x^4 - 4\,x^3 + 4\,x^2 - 4\,x + 4}{-x^4 + 2\,x^3 - 2\,x^2 + 2\,x - 1}\,.$$

El polinomio del numerador tiene grado mayor que el del denominador, así que habrá que hacer una división previa. Aunque podríamos limitarnos a desarrollar $1/Q(x)$, y luego multiplicar por $P(x)$, hagámoslo todo a la vez. La división de los polinomios nos permite escribir

$$f(x) = (-x - 3) + \frac{1 + x}{-x^4 + 2\,x^3 - 2\,x^2 + 2\,x - 1}\,.$$

Ahora, las cuatro soluciones de la ecuación

$$-x^4 + 2\,x^3 - 3\,x^2 + 2\,x - 1 = 0$$

son i, $-i$ y 1 (ésta, por partida doble). Y reescribir el polinomio en términos de estas raíces conduce a

$$Q(x) = -x^4 + 2\,x^3 - 3\,x^2 + 2\,x - 1 = -(x - i)\,(x + i)(x - 1)^2 = -(1 - i\,x)\,(1 + i\,x)(1 - x)^2\,.$$

Obsérvese cómo hemos reescrito los factores, preparando los cálculos posteriores. Olvidémonos por el momento del término $-x - 3$ (lo tendremos en cuenta al final) y desarrollemos el resto. El método de las fracciones simples nos sugiere escribirlo como (por comodidad, hemos puesto el signo menos en el denominador)

$$\frac{-1 - x}{(1 - i\,x)\,(1 + i\,x)(1 - x)^2} = \frac{A}{(1 - i\,x)} + \frac{B}{(1 + i\,x)} + \frac{C_1}{1 - x} + \frac{C_2}{(1 - x)^2}\,.$$

Si ahora sumamos a la derecha, el numerador que obtenemos resulta ser, tras el reordenamiento adecuado,

$$x^3\Big[iA - iB - C_1\Big] + x^2\Big[(1-2i)A + (1+2i)B + C_1 + C_2\Big] + x\Big[(i-2)A - (i+2)B - C_1\Big] + \Big[A + B + C_1 + C_2\Big]\,.$$

Comparando con $-1-x$ llegamos a que los números A, B, C_1 y C_2 son solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} iA - iB - C_1 & = & 0\,, \\ (1 - 2i)A + (1 + 2i)B + C_1 + C_2 & = & 0\,, \\ (i - 2)A - (i + 2)B - C_1 & = & -1\,, \\ A + B + C_1 + C_2 & = & -1\,. \end{array}\right.$$

Esto es,

$$A = \frac{1 + i}{4}\,, \quad B = \frac{1 - i}{4}\,, \quad C_1 = -\frac{1}{2}\,, \quad C_2 = -1\,.$$

Ahora ya podemos escribir nuestra función $f(x)$ de una forma adecuada:

$$f(x) = -3 - x + \frac{1+i}{4}\frac{1}{1-ix} + \frac{1-i}{4}\frac{1}{1+ix} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2}\,.$$

Finalmente, utilizamos la serie geométrica (y familia) para desarrollar en serie de potencias:

$$\begin{aligned} f(x) &= -3 - x + \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1+i}{4}i^n + \frac{1-i}{4}(-i)^n - \frac{1}{2} - \binom{n+1}{1}\right]x^n \\ &= -3 - x + \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{i^n}{4}\Big(1+(-1)^n\Big) + \frac{i^{n+1}}{4}\Big(1-(-1)^n\Big) - \frac{3}{2} - n\right]x^n\,. \end{aligned}$$

Los primeros coeficientes de esta función (hay que tener cuidado con los dos primeros, en los que influye el término $-3-x$) son

$$(-4, -4, -4, -4, -5, -7, -8, -8, -9, -11, -12, -12, -13, \cdots)$$

En realidad, todos los coeficientes que se obtienen son números reales (más aún, enteros negativos). Pero esto es casualidad, porque nadie nos aseguraba, en principio, que los coeficientes del desarrollo tuvieran algún significado especial. Aún se puede escribir una fórmula más compacta para los a_n (para $n \geq 2$):

$$a_n = \begin{cases} -n-1 & \text{si } n \equiv 0 \text{ ó } n \equiv 3 \pmod 4, \\ -n-2 & \text{si } n \equiv 1 \text{ ó } n \equiv 2 \pmod 4) \end{cases}$$

La función parecía complicada, pero sus coeficientes son sorprendentemente sencillos. ♣

12.3.4. La serie geométrica y la familia binómica

La "familia" de la serie geométrica es más numerosa de lo que uno sospecharía. Veamos, por ejemplo, lo que nos dice la fórmula del binomio:

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n\,.$$

La serie llega, en realidad, hasta $n = m$; la presencia del coeficiente binómico en la serie de la izquierda lo hace evidente. Pero también con la escritura de la derecha: si $n > m$, entonces algunos de los factores del numerador se anula.

Veamos, por otra parte, el desarrollo de la función $(1-x)^{-m-1}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^{m+1}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n}{n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(m+n)(m+n-1)\cdots(m+2)(m+1)}{n!}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-m-1)(-m-2)\cdots((-m-1)-n+2)((-m-1)-n+1)}{n!}(-x)^n\,. \end{aligned}$$

Hemos cambiado de signo los n factores del numerador, y el $(-1)^n$ resultante se lo hemos incorporado a la x.

Todos estos manejos persiguen descubrir la analogía que hay entre estos dos desarrollos, el de $(1+x)^m$ y el de $(1+(-x))^{-m-1}$. La simetría es evidente. Y es que ambos son casos particulares del siguiente teorema:

Teorema 12.4 (Teorema del binomio) *Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, si $|x|<1$, entonces*

$$f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n\,.$$

Afirmamos aquí que la serie de potencias converge, con seguridad, para $|x|<1$, pero en algunos casos el intervalo de convergencia podría ser mayor. Por ejemplo, si α es un entero positivo, tenemos simplemente un polinomio (y la convergencia será para todo x).

Antes de ver la demostración, vamos a aplicar el teorema a la obtención de los desarrollos en serie de unas cuantas funciones. Si α es un entero positivo, tenemos la fórmula del binomio habitual. Si $\alpha=-1$ y ponemos $-x$ en lugar de x, estamos con la serie geométrica. También hemos visto ya el caso $\alpha=-m-1$, con $m\geq 0$, y las posibles traslaciones y cambios de escala en la variable. Así que nos centraremos en otros valores de α. Por comodidad, y sólo por esta subsección, consideraremos el **coeficiente binómico generalizado**

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\,,$$

donde $\alpha\in\mathbb{R}$ (que coincide con el coeficiente binómico habitual cuando $\alpha=m$).

Ejemplo 12.3.3 *El caso $\alpha=1/2$.*

Estamos con la función $\sqrt{1+x}$, para $|x|<1$:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac12} &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}x^n = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1/2\,(1/2-1)(1/2-2)\cdots(1/2-n+1)}{n!}\,x^n\,,\\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{n!}\,x^n\,.\end{aligned}$$

Más interesante, desde el punto de vista combinatorio, es el desarrollo de la función $\sqrt{1-4x}$ (en principio, para $|x|<1/4$):

$$\begin{aligned}(1+(-4x))^{1/2} &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-4x)^n = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{n!}(-4)^n\,x^n\\ &= 1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)(2n-1)}{n!}\frac{n!}{n!}\,x^n\\ &= 1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\frac{\big[1\cdot3\cdots(2n-1)\big]\big[2\cdot4\cdots(2n-2)\,2n\big]}{n!\,n!}\,x^n\\ &= 1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\frac{(2n)!}{n!\,n!}\,x^n\,.\end{aligned}$$

Tras unas sencillas manipulaciones, deducimos que

$$\frac{1-\sqrt{1-4\,x}}{2\,x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\,x^n\,.$$

Así que la función de la izquierda genera una sucesión de números que son ya viejos conocidos, los números de Catalan, sobre cuyas interpretaciones combinatorias nos extendimos en el ejemplo 2.3.3 y cuya expresión explícita ya habíamos obtenido en el ejemplo 3.1.6. ♣

EJEMPLO 12.3.4 *Las funciones trigonométricas inversas.*

Sorprendentemente, la fórmula del binomio nos permite hallar los desarrollo en serie potencias de inversas de funciones trigonométricas, como por ejemplo el arcoseno. La clave es que su derivada es

$$\frac{d}{dx}\,\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Desarrollemos entonces la función de la derecha con el teorema del binomio; para ello, calculemos primero

$$\begin{aligned}\binom{-1/2}{n} &= \frac{(-1/2)\,(-1/2-1)\,(-1/2-2)\cdots(-1/2-n+1)}{n!}\\ &= \frac{(-1/2)\,(-3/2)\,(-5/2)\cdots(1-2n)/2}{n!} = \frac{(-1)^n}{2^n}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!}\,.\end{aligned}$$

Con esto, y utilizando que $2^n\,n! = 2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-1)^n\,x^{2n} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!}\,x^{2n}\\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\,n!}\,\frac{(2n)!}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\,x^{2n} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^n\,n!}\,\frac{1}{2^n\,n!}\,x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}\,x^{2n}\,.\end{aligned}$$

Ahora queremos integrar esta serie. Con ayuda de la Regla 5 de la sección 12.2, más la observación de que $\arcsin(0) = 0$ (que nos permite fijar el valor del primer coeficiente), obtenemos que

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\frac{1}{2n+1}\,x^{2n+1}\,.$$

De la misma manera se pueden obtener los desarrollos del arcocoseno (aunque bastaría aplicar que $\arccos(x) = \pi/2 - \arcsin(x)$) y de la arcotangente (véase el ejercicio 12.3.9). ♣

La demostración del teorema del binomio

Para cualquier α, la función $(1+x)^\alpha$ es infinitamente derivable, al menos para valores de x suficientemente próximos a cero (digamos $|x| < 1$). La fórmula de Taylor nos dice que una función con n derivadas se puede escribir, en este caso cerca del 0, como

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + R_n(x)\,,$$

donde la función $R_n(x)$ es el llamado resto de Taylor.

Si $f(x) = (1+x)^\alpha$, se comprueba sin dificultad que, para cada n,

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\,,$$

así que los coeficientes tiene la forma que proponíamos en el enunciado del teorema 12.4. Para probar el resultado deberíamos comprobar que el resto (del que se puede obtener una expresión explícita en términos de la función) tiende a 0 cuando $n \to \infty$.

Sin embargo, ése no es el enfoque que adoptaremos aquí[14]. Nuestra estrategia será la siguiente: argumentaremos *como si supiéramos* que la función $(1+x)^\alpha$ se puede desarrollar en serie de potencias, para comprobar que ésta ha de tener una forma específica. El paso final consistirá en probar algunas propiedades de la serie que obtendremos que nos permitirán deducir que, efectivamente, coincide con la función $(1+x)^\alpha$ (en la región adecuada).

Empecemos descubriendo la expresión que deberían tener los coeficientes de la serie, de la manera en la que lo habría hecho Newton, utilizando el método de los los coeficientes indeterminados. Esto supone escribir, para $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^\alpha x^n,$$

donde los c_n^α son todavía desconocidos. Por ahora entendemos esta igualdad (y los manejos posteriores que haremos) en un sentido formal; ya los justificaremos más adelante desde el punto de vista analítico.

Obsérvese (tomando $x = 0$) que $c_0^\alpha = 1$ para cualquier α. Primero,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^{\alpha+1} x^n = (1+x)^{\alpha+1} = (1+x)^\alpha(1+x) = (1+x)\sum_{n=0}^{\infty} c_n^\alpha x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^\alpha x^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}^\alpha x^n.$$

Así que, igualando coeficientes, obtenemos que

$$c_n^{\alpha+1} = c_n^\alpha + c_{n-1}^\alpha \quad \text{si } n \geq 1.$$

Es decir, obtenemos una ley de recurrencia (por cierto, la misma que en el caso de los coeficientes binómicos) que nos permite obtener la sucesión $(c_n^{\alpha+1})$ a partir de (c_n^α).

Cuando $\alpha = m$, con m un entero positivo, además de que $c_0^m = 1$, sabemos que $c_m^m = 1$; y esto basta, vía la construcción del triángulo de Tartaglia, para conocer la forma de los c_n^m. Pero en el caso general sólo tenemos que $c_0^\alpha = 1$. Así que debemos intentar algo más. La identidad

$$\alpha(1+x)^\alpha = \alpha(1+x)^{\alpha-1}(1+x) = \left[\frac{d}{dx}(1+x)^\alpha\right](1+x)\,,$$

traducida a la serie (insistimos en que por ahora son cálculos formales), nos da

$$\alpha\sum_{n=0}^{\infty} c_n^\alpha x^n = (1+x)\sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n^\alpha x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}^\alpha x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n^\alpha x^n.$$

[14]Véase, por ejemplo, en el texto *Análisis Matemático,* T.M. Apostol, Ed. Reverté, una discusión de la convergencia de la serie binómica estimando el resto.

Igualando coeficientes,

$$\alpha\, c_n^\alpha = (n+1)\, c_{n+1}^\alpha + n\, c_n^\alpha \qquad \text{o, equivalentemente,} \qquad c_{n+1}^\alpha = \frac{\alpha-n}{n+1}\, c_n^\alpha.$$

Ahora tenemos una recurrencia que involucra coeficientes con el mismo α; como conocemos c_0^α, esta nueva identidad nos permite calcular toda la sucesión (c_n^α). Por inducción, deducimos que, para cada n,

$$c_n^\alpha = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \binom{\alpha}{n},$$

donde hacemos uso, de nuevo, de la notación de los coeficientes binómicos generalizados.

Por ahora hemos comprobado (al menos formalmente) que, al traducir las propiedades de la función en los hipotéticos coeficientes, éstos han de tener una forma determinada. Aún hemos de probar que la serie con esos coeficientes representa, efectivamente, a la función $(1+x)^\alpha$. Llamemos

$$B_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

a la serie de potencias que nos interesa. Apliquémosle el criterio del cociente:

$$\left| \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} \Big/ \binom{\alpha}{n} x^n \right| = |x| \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!} \frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)} \right| = |x| \left| \frac{\alpha-n}{n+1} \right|.$$

Es decir, si $|x|<1$,

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} \Big/ \binom{\alpha}{n} x^n \right| = \limsup_{n\to\infty} |x| \left| \frac{\alpha-n}{n+1} \right| = |x| < 1.$$

Esto supone que la serie de potencias converge uniformemente en cualquier intervalo de la forma $[-a,a]$, donde $a<1$. Así que podemos derivar la serie término a término (compruébese en especial la manipulación de la segunda igualdad),

$$B'_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n\, x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (\alpha-k)\, x^k = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} k\, x^k$$

para obtener la siguiente ecuación diferencial para B_α:

$$B'_\alpha(x) = \alpha\, B_\alpha(x) - x B'_\alpha(x) \quad \Longrightarrow \quad B'_\alpha(x)(1+x) = \alpha B_\alpha(x)\,.$$

Utilizando esta identidad, deducimos que

$$\left(\frac{B_\alpha(x)}{(1+x)^\alpha} \right)' = \frac{B'_\alpha(x)(1+x)^\alpha - B_\alpha(x)\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} = 0.$$

Así que

$$B_\alpha(x) = (\text{constante})\,(1+x)^\alpha.$$

Pero como $B_\alpha(0)=1$, podemos concluir, finalmente, que

$$B_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$$

para $-1<x<1$, como queríamos demostrar. ■

12.3.5. De cómo Euler venció a los Bernoulli

Nuestro objetivo es obtener el valor de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,.$$

FIGURA 12.2: Johann Bernoulli

Este cálculo, una vez que se sabía que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergía, fue uno de los grandes retos de la matemática del siglo XVIII. Por supuesto, la suma es finita, porque, como $2n^2 \geq n(n+1)$ para cada $n \geq 1$, y recordando el ejemplo 12.3.1,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2\,.$$

Esto ya lo sabía Leibniz, quien, tras conseguir sumar los inversos de los números $n(n+1)/2$ (los números triangulares, véase el ejercicio 1.2.3), se propuso sumar los inversos de los números cuadrados. Pero no fue capaz, ni tampoco Jacob Bernoulli, que concedería que

> [. . .] sería muy grande nuestro agradecimiento si alguien nos comunicara este cálculo que, hasta ahora, ha eludido nuestros esfuerzos.

Años después de la muerte de Jacob, Euler fue capaz de completar el cálculo. Johann Bernoulli[15] diría:

> De este modo el más ferviente deseo de mi hermano se hace realidad. . . ¡si estuviera aquí!

Un primer intento, aprovechando que los coeficientes son positivos, sería considerar

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\, x^n\,,$$

serie de potencias que converge uniformemente si $|x| < 1$, y buscar el "valor" de $f(x)$ en $x = 1$. Podremos derivarla (y multiplicarla por x) dos veces, y luego integrar para obtener

$$x\,f'(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots \implies \big(x\,f'(x)\big)' = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x} \implies x\,f'(x) = \ln\frac{1}{1-x}\,.$$

Pero así no vamos por buen camino, porque no hay una expresión analítica útil para $f(x)$, que permita luego calcular el valor $f(1)$, al menos en el sentido del límite $x \to 1$.

[15] Johann Bernoulli (1667-1748) era un "puro" Bernoulli: competitivo, celoso de los demás miembros matemáticos de su familia, acabó enfrentado, tanto a su hermano Jacob como a su propio hijo Daniel (véanse sus notas biográficas en las páginas **??** y 466, respectivamente). No crea el lector que estos enfrentamientos a los que nos referimos eran peleas en la cocina de casa: los bravos Bernoulli acostumbraban a airear sus disputas públicamente. Como otros miembros de la familia, fue obligado a estudiar Medicina (su disertación doctoral versó sobre un modelo matemático del movimiento muscular), aunque pronto se decantaría por las Matemáticas, de la mano (¡sólo al principio!) de su hermano Jacob. A Johann se le recuerda especialmente por sus aportaciones a lo que hoy conocemos como Cálculo variacional (braquistocrona, problema isoperimétrico), aunque también por sus trabajos en Mecánica y en la teoría de los fluidos. Como ilustración de las maniobras que se gastaban estos Bernoulli, se dice que falseó la fecha de publicación de obra *Hydraulica* (que aparecería en 1739, pero datada en 1732), para adelantarse así a la *Hydrodinamica* de su hijo Daniel, de 1738.

Hace falta algo más. La sorpresa: Euler. Sabemos (véase el ejemplo 12.3.4) que

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \frac{1}{2n+1}\, x^{2n+1} \qquad \text{para } 0 < x < 1.$$

Como todos los términos son positivos, podemos (véase la subsección 12.3.1) obtener el valor de la función en $x = 1$:

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \frac{1}{2n+1}\,.$$

Vamos ahora a calcular la integral

$$I = \int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

de dos maneras diferentes: por un lado, integrando por partes,

$$I = \int_0^1 \arcsin(x)\, d(\arcsin(x)) = \frac{\arcsin(x)^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

Y por otro[16],

$$I = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \frac{1}{2n+1}\, x^{2n+1} \right) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \frac{1}{2n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx\,.$$

La última integral ya la obtuvimos en el ejemplo 6.1.17:

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}} \frac{1}{2n+1}\,.$$

De estos dos cálculos concluimos que

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\,.$$

Ya estamos cerca: sólo queda observar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \text{ par}} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\,,$$

de donde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{4}{3}\,\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

[16]Queda como ejercicio para el lector con inclinaciones hacia el Análisis Matemático comprobar que se pueden intercambiar los símbolos de integración y sumación. Puede, por ejemplo, considerar la integral entre 0 y $1-\varepsilon$, donde tenemos convergencia uniforme, y concluir con un argumento de monotonía.

A. La primera demostración de Euler

La que hemos descrito no fue, en realidad, la primera demostración de Euler. Anteriormente había propuesto la elegante prueba que pasamos a exponer. Partimos de la función

$$P(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^5}{6!} + \cdots = \frac{\sin(x)}{x},$$

entendida (al menos así lo hacía Euler) como un polinomio infinito. Claramente, $P(0) = 1$, y las raíces de la ecuación $P(x) = 0$ vienen dados por $x = k\,\pi$, para cada entero $k \neq 0$. Si aceptamos que a este "polinomio infinito" se le pueden aplicar los argumentos de factorización de los polinomios usuales[17], podemos escribir que

$$P(x) = \prod_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \Big(1 - \frac{x}{k\,\pi}\Big) = \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{x}{k\,\pi}\Big)\Big(1 + \frac{x}{k\,\pi}\Big) = \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{x^2}{k^2\,\pi^2}\Big).$$

Si mantenemos nuestra fe en la validez de estos argumentos, podemos desarrollar el producto infinito en serie de potencias e igualarlo a la expresión original de $P(x)$, para obtener que

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^5}{6!} + \cdots = 1 - \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\,\pi^2} + \frac{1}{9\,\pi^2} + \frac{1}{16\,\pi^2} + \cdots\right) x^2 + \cdots$$

Y ahora sólo resta igualar los coeficientes de x^2 para obtener[18] finalmente que

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots\right) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Aún daría Euler una tercera prueba, que mostramos con cierto detalle en el ejercicio 12.3.12. Y siguió explotando estas ideas para obtener los valores de las series del tipo $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$, para valores pares de p. Así, por ejemplo[19],

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^8} = \frac{\pi^8}{9450}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{10}} = \frac{\pi^{10}}{93555}.$$

[17] Esto dista de ser un detalle trivial. Euler *sabía* que la factorización usando los ceros era correcta, en particular, para $\mathrm{sen}(x)/x$. Pero esto no es un hecho general. Por ejemplo, la función $e^x\mathrm{sen}(x)/x$ tiene los mismos ceros y no coincide con el producto infinito.

[18] El mismo argumento permite obtener la **fórmula de Wallis** (que hemos visto con detalle en la subsección 2.4.4), al menos en la versión en la que el propio Wallis la escribía. Si el lector evalúa la función $P(x) = \sin(x)/x$ en $x = \pi/2$, podrá obtener, tras unas cuantas manipulaciones, que

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1\times 3}{2^2}\,\frac{3\times 5}{4^2}\,\frac{5\times 7}{6^2}\,\frac{7\times 9}{8^2}\cdots$$

(compárese con las expresiones de la subsección 2.4.4).

[19] Contra lo que podrían sugerir estos primeros casos, no siempre aparece un 1 en el numerador. Por ejemplo, $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-12} = \pi^{12}\,691/638512875$. La fórmula involucra los llamados **números de Bernoulli** (véase el ejercicio 12.7.5). Las sumas con exponente impar son mucho más complicadas. Para dar idea de lo poco que se sabe de ellas, no fue hasta 1978 cuando R. Apéry demostró que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ era un número irracional. Ni siquiera eso se sabe para los valores $p = 5, 7, \ldots$. La demostración de Apéry usaba, en realidad, métodos que eran ya conocidos por los matemáticos del siglo XVIII, y por Euler en particular. Van der Poorten titulaba su recensión del *Math. Intelligencer* **1** (1979) de la siguiente manera: *A proof that Euler missed. . . Apéry's proof of the irrationality of* $\zeta(3)$. Véase, por ejemplo, el artículo de Antonio Córdoba *Disquisitio Numerorum* (La Gaceta de la RSME **4** (2001), no. 1).

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 12.3

12.3.1 *Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ son dos series de potencias que convergen en intervalos $(-R, R)$ y $(-M, M)$, respectivamente. ¿Dónde convergen las series de potencias $\alpha f(x) + \beta g(x)$ y $f(x)g(x)$? ¿Y $f(x)/(1-x)$? Compruébese que las series de potencias $x^m f(x)$ y $f^{(m)}(x)$ convergen en el mismo intervalo que la $f(x)$ original.*

12.3.2 *Compruébese que, dada una sucesión de números (a_n),*

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

12.3.3 *Sea (a_n) una sucesión de números que cumplen que $|a_n| \leq C\, M^n$, donde C y M son ciertas constantes positivas. Compruébese que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tiene un radio de convergencia $R \geq 1/M$.*

12.3.4 *Utilícese un argumento similar al del ejemplo* 12.3.1 *para comprobar que*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}} = 1\,, \qquad \text{donde } (F_n) \text{ es la sucesión de Fibonacci.}$$

12.3.5 *Sea $(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$ una cierta sucesión de números reales para la que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.*
(a) Consideremos, en primer lugar, las sucesiones (y_n) y $(\widetilde{y}_n)$ dadas, para cada $n \geq 0$, por

$$y_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k \qquad e \qquad \widetilde{y}_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a_k\,.$$

Obsérvese que la primera es la sucesión de las medias aritméticas, y la segunda, la sucesión de lo que llamaríamos las medias binómicas. Compruébese que el límite de ambas sucesiones es L.
(b) Más generalmente, consideremos unos números $M_{n,k}$ positivos que cumplen que (1) $M_{n,k} = 0$ si $k > n$; (2) $\sum_{k=0}^{n} M_{n,k} = 1$ para cada n; y (3) $\lim_{n\to\infty} M_{n,k} = 0$ para cada k. Demuéstrese que la sucesión

$$\widehat{y}_n = \sum_{k=0}^{\infty} M_{n,k}\, a_k \qquad \text{tiende a } L \text{ cuando } n \to \infty.$$

(c) Ahora, dos promedios con claro sabor probabilístico. Consideramos

$$y(p) = \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k\, a_k \qquad e \qquad \widetilde{y}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\, a_k\,,$$

donde $0 < p < 1$ y $\lambda > 0$. Compruébese que $\lim_{p\to 0} y(p) = L$. ¿Qué ocurre cuando $p \to 1$? ¿Qué ocurre con $\widetilde{y}(\lambda)$ cuando $\lambda \to \infty$?

12.3.6 ***Demostración del Lema de Abel*** (Lema 12.2). *Sea $f(x) = \sum_n a_n x^n$ una serie de potencias con radio de convergencia 1 y supongamos que $\sum_n a_n = A$. Consideramos la sucesión (c_n) dada por $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Obsérvese que $\lim_{n\to\infty} c_n = A$.*
(a) Utilícese que $a_0 = c_0$ y $a_n = c_n - c_{n-1}$ si $n \geq 1$ para comprobar que, para cualquier $n \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k + c_n x^n \qquad \text{para } |x| < 1.$$

Dedúzcase que

$$f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\,.$$

(b) Utilícese la representación anterior para deducir, finalmente, que $\lim_{x\uparrow 1} f(x) = A$.

12.3.7 *Partimos del Lema de Abel (Lema 12.2): si* $\sum_n a_n x^n$ *es una serie de potencias con radio de convergencia 1 y* $\sum_n a_n$ *converge, entonces* $\lim_{x\uparrow 1}\sum_n a_n x^n = \sum_n a_n$.

(a) Sea ahora $g(x) = \sum_n b_n x^n$ *una serie de potencias con radio de convergencia* $R > 0$. *Supongamos que* $\sum_n b_n R_n$ *converge. Compruébese que* $f(x) = g(Rx)$ *es una serie de potencias con radio de convergencia 1. Aplíquese el lema de Abel a* $f(x)$ *para comprobar que* $\lim_{x\uparrow R} g(x) = \sum_n b_n R_n$.

(b) Digamos que $g(x) = \sum_n b_n x^n$ *tiene radio de convergencia 1 y que* $\sum_n b_n(-1)^n$ *converge. Utilícese un argumento similar al del apartado anterior para comprobar que* $\lim_{x\downarrow -1} g(x) = \sum_n b_n(-1)^n$.

12.3.8 *Utilícese el apartado a) del ejercicio anterior para comprobar que*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,2^n} = \ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,.$$

Ambas series infinitas dan, como resultado, $\ln(2) = 0.6931471806\ldots$ *Pero quizás el lector quiera entretenerse en comprobar computacionalmente el diferente grado de aproximación que dan, sumando, por ejemplo, los 100 primeros términos de las dos series.*

12.3.9 *(a) Sabiendo que*

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}\,,$$

compruébese que

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

(b) La serie numérica $\sum_n (-1)^n/(2n+1)$ *converge (recuérdese el teorema 12.1). Aplíquese el lema de Abel a la función arcotangente para obtener el siguiente método de cálculo del número* π*:*

$$\pi = 4\Big(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\Big)$$

12.3.10 *Pruébese que*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}\,.$$

12.3.11 *Obténgase el desarrollo de* $(1\pm x)^{m/2}$, *con* m *entero.*

12.3.12 *Otra demostración de Euler de que* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\pi^2/6$. *Partimos del siguiente polinomio de grado* m*:*

$$P_m(x) = \sum_{j=0}^{m}\binom{2m+1}{2j+1}(-1)^j x^{m-j}\,.$$

Utilizando la fórmula de de Moivre (página 28) y la fórmula del binomio, se comprueba que

$$e^{i\,(2m+1)\,\theta} = \cos((2m+1)\theta) + i\,\sin((2m+1)\theta)\,,$$
$$e^{i\,(2m+1)\,\theta} = (\cos\theta + i\,\sin\theta)^{2m+1} = \sum_{k=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{k}(\cos\theta)^{2m+1-k}\,(\sin\theta)^k\,i^k\,.$$

(a) Compárense las partes imaginarias de las dos fórmulas anteriores para deducir que

$$\sin((2m+1)\theta) = (\sin\theta)^{2m+1}\,P_m(\cot^2\theta)\,.$$

(b) Dedúzcase que los números (reales)

$$r_k = \cot^2\left(\frac{k\,\pi}{2m+1}\right)\,,\qquad k = 1,\dots,m$$

son las m raíces del polinomio $P_m(x)$.

(c) Compruébese que

$$P_m(x) = (2m+1)\prod_{k=1}^{m}(x - r_k)\,.$$

(d) Dedúzcase, a partir del coeficiente de x^{m-1} de $P_m(x)$, que

$$\sum_{k=1}^{m} r_k = \sum_{k=1}^{m}\cot^2\left(\frac{k\,\pi}{2m+1}\right) = \frac{m\,(2m-1)}{3}\,.$$

(e) Ahora vamos a utilizar las dos siguientes estimaciones de tamaño de la función cotangente. Por un lado,

$$\cot\theta < \frac{1}{\theta}\qquad (\textit{si } \theta \in (0,\pi/2)).$$

Por otro, como $\sin\theta < \theta$ si $\theta \in (0,\pi/2)$, se tiene que

$$\cot^2\theta = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta} - 1 > \frac{1}{\theta^2} - 1\qquad (\textit{si } \theta \in (0,\pi/2)).$$

Utilícense estas dos estimaciones en la identidad del apartado anterior para deducir que

$$\frac{\pi^2}{6}\,\frac{2m\,(2m-1)}{(2m+1)^2} < \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{6}\,\frac{4\,m(m+1)}{(2m+1)^2}\,.$$

(g) Por último, pásese al límite $m \to \infty$ en las desigualdades del apartado anterior para obtener el resultado deseado.

12.4. Resolución de ecuaciones de recurrencia

Ya tenemos la técnica, y es hora de aplicarla a un problema concreto, como es el de la resolución de ecuaciones de recurrencia. Ya vimos, en el capítulo 6, algunos métodos, de otra índole, y nos disponemos ahora a tratarlas con el lenguaje de las funciones generatrices.

El punto de partida es una sucesión (a_n) que verifica una cierta ecuación de recurrencia (y unas condiciones iniciales). Para resolver la recurrencia, esto es, para obtener una fórmula para a_n, seguiremos los siguientes pasos:

- primero, codificaremos la sucesión (a_n) con una función generatriz, digamos $f(x)$.
- El segundo paso consistirá en utilizar la información disponible sobre la sucesión (ecuación de recurrencia y valores iniciales) para obtener una ecuación (algebraica, quizás diferencial) para $f(x)$. Si somos capaces de resolverla, tendremos una *expresión* de $f(x)$.
- Nos interesa obtener una fórmula para a_n, así que el paso final será desarrollar en serie de potencias la función $f(x)$.

Todo esto se puede entender como un proceso puramente formal (así lo haremos en la sección 12.7). No hay, por ejemplo, evaluaciones de la función en punto alguno, así que podríamos obviar toda mención a la convergencia de las series de potencias que vayan apareciendo.

A. Una sucesión, un parámetro

Parte de este proceso ya lo hicimos, para la sucesión de números de Fibonacci, en la subsección 12.1.1. Así que volvamos a tratar este caso, como ejemplo de una ecuación de recurrencia lineal, homogénea y con coeficientes constantes.

EJEMPLO 12.4.1 *Consideremos la sucesión de números de Fibonacci* (F_n) *dada por* $F_0 = 0$ *y* $F_1 = 1$ *y* $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ *para cada* $n \geq 2$.

Empezamos asociando a los F_n su función generatriz,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n\, x^n\,.$$

Transferimos ahora la información de la ecuación de recurrencia y las condiciones iniciales a la función generatriz. Sus dos primeros coeficientes están fijados y los siguientes, del tercero en adelante, los reescribimos siguiendo la ecuación:

$$\begin{aligned} f(x) = F_0 + F_1 x + {} & \underbrace{F_2\,x^2}_{\substack{F_1x^2\\+\\F_0x^2}} + \underbrace{F_3\,x^3}_{\substack{F_2x^3\\+\\F_1x^3}} + \underbrace{F_4\,x^4}_{\substack{F_3x^4\\+\\F_2x^4}} + \underset{\substack{\cdots\\ \\ \cdots}}{\cdots} = \\ = F_0 + F_1 x + {} & \big(F_1\,x^2 + F_2\,x^3 + F_3\,x^4 + \cdots\big) + \big(F_0\,x^2 + F_1\,x^3 + F_2\,x^4 + \cdots\big) \end{aligned}$$

Ahora, con ayuda de las reglas de desplazamiento de coeficientes, identificamos las dos series de potencias que han aparecido. Lo que queda, como el lector deberá comprobar, es que

$$f(x) = F_0 + F_1\,x + x\,[f(x) - F_0] + x^2\,f(x) = x + f(x)\,\big(x + x^2\big)\,.$$

El lector que se encuentre cómodo con la notación de los sumatorios puede hacer todo este proceso manipulando las series directamente:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n\, x^n = F_0 + F_1\, x + \sum_{n=2}^{\infty} F_n\, x^n = F_0 + F_1\, x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2})\, x^n \\
&= F_0 + F_1\, x + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1}\, x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2}\, x^n = F_0 + F_1\, x + x \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1}\, x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2}\, x^{n-2} \\
&= F_0 + F_1\, x + x \sum_{n=1}^{\infty} F_n\, x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n\, x^n = F_0 + F_1\, x + x\, [f(x) - F_0] + x^2\, f(x)
\end{aligned}
$$

Ahora que tenemos una ecuación (algebraica) para $f(x)$, la resolvemos. Aquí, simplemente, se trata de "despejar" la $f(x)$:

$$
f(x) = x + f(x)\,\big(x + x^2\big) \quad\Longrightarrow\quad f(x)\,\big(1 - x - x^2\big) = x \quad\Longrightarrow\quad f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}
$$

(esta expresión es válida, en principio, en $|x| < 1/\tau$).

Sigamos. Lo que nos interesan son los coeficientes de $f(x)$, esto es, los números de Fibonacci F_n. Están ahí, encerrados en las tripas de la función $x/(1-x-x^2)$. Sólo hay que sacarlos a la luz, desarrollando la función en serie de potencias. Ahora sabemos hacerlo, aplicando el método de fracciones simples. La ecuación $1 - x - x^2 = 0$ tiene dos raíces,

$$
\alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \qquad \text{y} \qquad \beta = \frac{-\sqrt{5} - 1}{2},
$$

de forma que

$$
1 - x - x^2 = -(x - \alpha)(x - \beta)
$$

(cuidado con los signos). Y podremos escribir

$$
\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{-x}{(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{A}{(x - \alpha)} + \frac{B}{(x - \beta)}.
$$

Igualando coeficientes de los numeradores, determinamos A y B, que resultan ser $A = (\sqrt{5} - 5)/10$ y $B = -(\sqrt{5} + 5)/10$. Con ellos, y tras ciertas manipulaciones, obtenemos que

$$
\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{\sqrt{5} - 5}{10}\,\frac{1}{x - \alpha} - \frac{\sqrt{5} + 5}{10}\,\frac{1}{x - \beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{5 - \sqrt{5}}{10}\,\frac{1}{\alpha^{n+1}} + \frac{5 + \sqrt{5}}{10}\,\frac{1}{\beta^{n+1}} \right] x^n .
$$

De esta expresión, y utilizando los valores de α y β, leemos directamente el valor de los coeficientes:

$$
F_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n ,
$$

la fórmula de Binet que ya conocíamos (véase el ejemplo 6.2.1).

Podríamos haber intentado un enfoque alternativo, aprovechando que $f(x)$ tiene un aspecto muy semejante a la serie geométrica:

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{x}{1-(x+x^2)} = x\sum_{k=0}^{\infty}(x+x^2)^k.$$

Si ahora utilizamos el teorema del binomio, podremos desarrollar el paréntesis interior:

$$\begin{aligned}\frac{x}{1-x-x^2} &= x\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}x^{k-l}(x^2)^l\right) = x\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}x^{k+l}\right)\\ &= x\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{l\le k\\ l+k=n}}\binom{k}{l}\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{n}\binom{n-l}{l}\right)x^{n+1}.\end{aligned}$$

Así llegamos a una fórmula para el coeficiente que acompaña a x^{n+1} en el desarrollo de $f(x)$ que es, no puede ser otro, el número F_{n+1}:

$$F_{n+1} = \sum_{l=0}^{n}\binom{n-l}{l},$$

expresión que ya obtuvimos, por ejemplo, en la subsección 6.3.5. ♣

Los mismos argumentos que hemos utilizado aquí se aplican a cualquier ecuación lineal homogénea, con coeficientes constantes y grado k. Subamos el grado de dificultad: una ecuación de recurrencia lineal y con coeficientes constantes, pero con un término no homogéneo.

Ejemplo 12.4.2 *Queremos hallar la sucesión de números (a_n) que verifica que $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n$ si $n \geq 2$.*

Construimos la función $f(x)$ que genera los (a_n) y traducimos la información que tenemos sobre estos números en una ecuación sobre $f(x)$:

$$\begin{aligned}f(x) &= a_0 + a_1x + \sum_{n=2}^{\infty}(a_{n-1}+a_{n-2}+n)x^n = x + x\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}\,x^{n-1} + x^2\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}\,x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty}nx^n\\ &= x + x\,f(x) + x^2\,f(x) + \left(\frac{1}{(1-x)^2} - x\right).\end{aligned}$$

Hemos utilizado aquí que conocemos bien la función asociada a la sucesión cuyo coeficiente n-ésimo es, precisamente, n. Ya tenemos la ecuación para $f(x)$,

$$f(x) = x\,f(x) + x^2\,f(x) + \frac{1}{(1-x)^2},$$

de la que obtenemos que

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2\,(1-x-x^2)}.$$

Los coeficientes de esta función se pueden obtener desarrollando en serie de potencias, utilizando fracciones simples, ejercicio que dejamos al lector. ♣

Así que, si tenemos términos no homogéneos, todo lo que necesitaremos será sumar (obtener una expresión analítica de) la o las series de potencias que provengan de la parte no homogénea. Sin embargo, el que la ecuación siga siendo lineal de coeficientes constantes nos asegura que el tipo de ecuación que obtendremos para $f(x)$ seguirá siendo algebraica.

Para ver lo que puede ocurrir al manejar ecuaciones lineales con coeficientes no constantes, consideremos el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 12.4.3 *Consideramos la sucesión de números* (a_n) *dada por* $a_0 = 1$ *y*

$$(n+1)\, a_{n+1} = 3\, a_n + \frac{2^n}{n!}\,, \qquad \textit{para cada } n \geq 0.$$

Como siempre, empezamos introduciendo la función generatriz $f(x)$ asociada a la sucesión:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\,.$$

Tal como viene escrita la recurrencia, conviene no "despejar" el término de mayor índice (en este caso, a_{n+1}), sino trabajar directamente con ella. Como la recurrencia es válida para cada $n \geq 0$, se cumplirá que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\, a_{n+1}\, x^n = 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}\, x^n\,.$$

Si identificamos las series que aparecen (la propia $f(x)$, su derivada y la función e^{2x}), obtenemos la ecuación que debe verificar la función generatriz:

$$f'(x) = 3\, f(x) + e^{2x}\,.$$

Ésta es una ecuación diferencial para $f(x)$, cuya solución general viene dada[20] por

$$f(x) = C\, e^{3x} - e^{2x}\,,$$

donde C es una constante. El que $a_0 = 1$ exige que $f(0) = 1$; y con esta información extra podemos concluir que

$$f(x) = 2\, e^{3x} - e^{2x}\,.$$

Desarrollar esta función en serie de potencias, y con ello, obtener los números a_n, es sencillo:

$$f(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}\, x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}\, x^n\,,$$

de donde obtenemos

$$a_n = \frac{1}{n!}\left(2 \times 3^n - 2^n\right)\,,$$

la expresión de los a_n que andábamos buscando. ♣

[20]Se puede emplear, por ejemplo, un truco de factor integrante. Obsérvese que

$$\big(f(x)e^{-3x}\big)' = f'(x)\, e^{-3x} - 3f(x)e^{-3x} = e^{-3x}\big(f'(x) - 3f(x)\big) = e^{-3x}\, e^{2x} = e^{-x}\,,$$

Integrando esta expresión, llegamos a la solución general del texto.

En algunas de las ecuaciones de recurrencia que vimos en la sección 6.1, un cierto término de la sucesión dependía de *todos* los anteriores:

Ejemplo 12.4.4 *En el ejemplo 6.1.11 veíamos que los números M_n, que contaban el número de posibles montones con n barriles en la primera fila, cumplían que*

$$M_n = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) M_j \qquad \textit{para cada } n \geq 2,$$

junto con la condición inicial $M_1 = 1$.

Considérese la función generatriz $M(x)$ asociada a la sucesión (M_n). Utilizamos la condición inicial y la ecuación de recurrencia para escribir que

$$\begin{aligned}
M(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} M_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} \Big(1 + \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) M_j\Big) x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) M_j \, x^n \\
&= x + \frac{x^2}{1-x} + \sum_{j=1}^{\infty} M_j \sum_{n=j+1}^{\infty} (n-j) x^n = \frac{x}{1-x} + \sum_{j=1}^{\infty} M_j x^j \sum_{n=j+1}^{\infty} (n-j) x^{n-j} \\
&= \frac{x}{1-x} + \sum_{j=1}^{\infty} M_j x^j \sum_{k=1}^{\infty} k x^k = \frac{x}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2} \sum_{j=1}^{\infty} M_j x^j = \frac{x}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2} M(x) \,,
\end{aligned}$$

de donde

$$M(x) = \frac{x(1-x)}{1-3x+x^2} \,.$$

Ya sólo resta desarrollar en serie de potencias (o revisar el ejercicio 12.2.6) para concluir que $M_n = F_{2n-1}$ para cada $n \geq 1$, donde (F_n) es la sucesión de Fibonacci. ♣

Si la ecuación no es lineal, las dificultades aumentan enormemente, y sólo en casos muy particulares vamos a disponer de métodos de resolución explícita. Por su especial relevancia en cuestiones combinatorias, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 12.4.5 *La sucesión de los números de Catalan (C_n) viene definida por*

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \cdots + C_{n-2} C_1 + C_{n-1} C_0 = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \, C_{n-1-k} \quad \textit{para cada } n \geq 1,$$

si convenimos en que $C_0 = 1$.

En el ejemplo 3.1.6 obtuvimos ya una fórmula para estos números. Ahora abordamos la cuestión utilizando funciones generatrices. Si $C(x)$ es la función generatriz de la sucesión (C_n),

$$\begin{aligned}
C(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \bigg(\sum_{j=0}^{k-1} C_j C_{k-1-j} \bigg) x^k = 1 + x \sum_{k=1}^{\infty} \bigg(\sum_{j=0}^{k-1} C_j C_{k-1-j} \bigg) x^{k-1} \\
&= 1 + x \sum_{n=0}^{\infty} \bigg(\sum_{j=0}^{n} C_j C_{n-j} \bigg) x^n = 1 + x\, C^2(x) \,,
\end{aligned}$$

pues la última suma entre paréntesis es el coeficiente n-ésimo de la función $C^2(x)$.

Esta ecuación de segundo grado (para $C(x)$) tiene dos posibles soluciones:

$$\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\,.$$

El que $C_0 = 1$, esto es, $C(0) = 1$, descarta la primera posibilidad (pero no la segunda, como se puede comprobar, por ejemplo, con ayuda de la regla de L'Hôpital). Así que la función generatriz de los números de Catalan es la que aparece a la derecha. Ahora sólo tenemos que irnos al ejemplo 12.3.3 y revisar el cálculo con el teorema del binomio que hicimos allí para tener la fórmula para los números de Catalan. ♣

B. Una sucesión, dos parámetros

Como ya hemos visto en ocasiones, las ecuaciones de recurrencia pueden involucrar más de un parámetro: es el caso de las que obtuvimos para los coeficientes binómicos, los distintos números de Stirling, etc. Nos planteamos ahora cómo tratar estas ecuaciones mediante las funciones generatrices.

Para ilustrarlo, recurriremos a los números $C(n,k)$, que cuentan el número de subconjuntos de tamaño k que podemos extraer de $\{1,\dots,n\}$, y de los que ya disponemos de una fórmula explícita, la dada por los coeficientes binómicos.

Digamos que n y k son enteros no negativos. Recordemos que las condiciones iniciales eran $C(n,0) = 1$ y $C(n,n) = 1$ (el caso $(C(0,0) = 1$ es, simplemente, una convención). La ecuación de recurrencia, si $n \geq 1$ y $0 < k \leq n$, es

$$C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k)\,.$$

Podemos empezar considerando, *para cada n fijo*, la función generatriz

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C(n,k)\,x^k\,.$$

El caso $n = 0$ es especial: $f_0(x) = C(0,0) = 1$. Para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} C(n,k)\,x^k = C(n,0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(C(n-1,k-1) + C(n-1,k)\Big)\,x^k \\ &= 1 + x\sum_{k=1}^{\infty} C(n-1,k-1)\,x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} C(n-1,k)\,x^k \\ &= 1 + x\sum_{j=0}^{\infty} C(n-1,j)\,x^j + \sum_{k=0}^{\infty} C(n-1,k)\,x^k - C(n-1,0)\,, \end{aligned}$$

de donde obtenemos una ecuación de recurrencia para las funciones $f_n(x)$:

$$f_n(x) = (1+x)\,f_{n-1}(x) \qquad \text{para cada } n \geq 1.$$

Si ahora iteramos esta relación hasta llegar al valor inicial, $f_0(x)$, obtenemos que

$$f_n(x) = (1+x)^n\,.$$

Y utilizando la fórmula del binomio, obtenemos la expresión habitual de los $C(n,k)$.

Aunque también podríamos considerar, *para cada k fijo*, la siguiente función generatriz:

$$g_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C(n,k)\, x^n \,.$$

De nuevo, el caso $k = 0$ es especial:

$$g_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C(n,0)\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\,.$$

Para $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} g_k(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} C(n,k)\, x^n = C(0,k) + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(C(n-1,k-1) + C(n-1,k) \Big)\, x^n \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} C(n-1,k-1)\, x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{\infty} C(n-1,k)\, x^{n-1} \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} C(n,k-1)\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} C(n,k)\, x^n \,, \end{aligned}$$

de donde

$$g_k(x) = x\, g_{k-1}(x) + x\, g_k(x)\,;$$

esto es,

$$g_k(x) = \frac{x}{1-x} g_{k-1}(x) \qquad \text{para cada } k \geq 1.$$

De nuevo, iterando, llegamos a que

$$g_k(x) = g_{k-1}(x)\, \frac{x}{1-x} = g_{k-2}(x) \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 = \cdots = g_0(x) \left(\frac{x}{1-x}\right)^k = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}\,.$$

De manera que

$$g_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = x^k \sum_{j=0}^{\infty} \binom{k+j}{k} x^j = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{k+j}{k} x^{j+k} = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^n \,.$$

Parece que hemos obtenido el mismo resultado, pero fijémonos en que

$$f_n(x) = (1+x)^n \quad \longleftrightarrow \quad \left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}, 0, 0, \dots \right),$$

mientras que

$$g_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \quad \longleftrightarrow \quad \left(0, 0, \dots, 0, \binom{k}{k}, \binom{k+1}{k}, \binom{k+2}{k}, \dots \right),$$

Para cada n fijo, $f_n(x)$ codifica los coeficientes binómicos de un "piso" del triángulo de Tartaglia (en realidad, un número finito de coeficientes). Para k fijo, $g_k(x)$ contiene los de una diagonal (por eso es una verdadera sucesión infinita de números).

En un alarde de valentía y entusiasmo, podemos intentar un tercer enfoque. Se trata de codificar *todos* los coeficientes binómicos a la vez, aunque para ello necesitaremos recurrir a un objeto más general, como es una función de dos variables, digamos x e y:

$$F(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} C(n,k)\, x^n\, y^k\,.$$

Para obtener una expresión manejable de esta función, utilizamos de nuevo la información sobre los $C(n,k)$, separando los casos en que los índices valgan 0:

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \sum_{k=0}^{\infty} C(0,k)\, y^k + \sum_{n=1}^{\infty} C(n,0)\, x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} C(n,k)\, x^n\, y^k \\
&= 1 + \left(\frac{1}{1-x} - 1\right) + \sum_{n,k=1}^{\infty} C(n-1,k-1)\, x^n\, y^k + \sum_{n,k=1}^{\infty} C(n-1,k)\, x^n\, y^k \\
&= \frac{1}{1-x} + x\,y \sum_{n,k=0}^{\infty} C(n,k)\, x^n\, y^k + x \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} C(n,k)\, x^n\, y^k \\
&= \frac{1}{1-x} + x\,y\, F(x,y) + x\left(F(x,y) - \frac{1}{1-x}\right),
\end{aligned}$$

de donde, despejando,

$$F(x,y) = \frac{1}{1-x-xy}\,.$$

Para desarrollarla en serie, aprovechamos que es una serie geométrica (y luego utilizamos el teorema del binomio):

$$\frac{1}{1-x-xy} = \sum_{n=0}^{\infty}(x+xy)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n\,(1+y)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} y^k = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^n\, y^k\,,$$

de donde, por comparación, deducimos que $C(n,k) = \binom{n}{k}$. El uso de funciones generatrices en dos variables es muy útil en ciertos contextos (véase, por ejemplo, el capítulo 15).

C. Dos sucesiones, un parámetro (sistemas de ecuaciones)

Veamos por último cómo se manejan, con funciones generatrices, **sistemas de ecuaciones de recurrencia**. El método que seguiremos es análogo al utilizado para una única ecuación. Ahora necesitaremos una función generatriz por cada sucesión de números de interés, y el sistema de ecuaciones de recurrencia se transformará en un sistema de ecuaciones para esas funciones generatrices. Al resolverlo obtendremos las expresiones de las funciones, para, finalmente, desarrollar en serie cada una de ellas. Lo vemos en un ejemplo.

EJEMPLO 12.4.6 *Queremos encontrar las sucesiones (a_n) y (b_n) que verifican que*

$$\left\{\begin{aligned} a_n &= 3\,a_{n-1} + b_{n-1}\,, \\ b_n &= 2\,a_{n-1} + b_{n-1}\,, \end{aligned}\right. \qquad \textit{para cada } n \geq 1,$$

junto con las condiciones iniciales $a_0 = 1$, $b_0 = 1$.

En la subsección 6.2.3 vimos cómo resolver estos sistemas con las herramientas del Álgebra lineal. Introducimos ahora las funciones generatrices asociadas a las sucesiones (a_n) y (b_n).

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \qquad \text{y} \qquad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n\,.$$

La primera ecuación, escrita en términos de estas dos funciones, viene a ser

$$A(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (3a_{n-1} + b_{n-1})\, x^n = 1 + 3x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}\, x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1}\, x^{n-1} = 1 + x\, A(x) + x\, B(x)\,.$$

Procediendo de manera análoga con la segunda ecuación, llegamos a que las funciones generatrices verifican el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A(x)(1-3x) & = & 1 + xB(x)\,, \\ B(x)(1-x) & = & 2x\, A(x) \end{array} \right.$$

(recuérdese que las “incógnitas” son aquí las series $A(x)$ y $B(x)$). Resolviendo este sistema obtenemos que

$$A(x) = \frac{1-x}{x^2 - 4x + 1} \qquad \text{y} \qquad B(x) = \frac{2x}{x^2 - 4x + 1}\,.$$

Finalmente, desarrollamos en serie de potencias para obtener la solución del problema:

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3})^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6}(2-\sqrt{3})^n \right) x^n \\ B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2+\sqrt{3})^n - \frac{\sqrt{3}}{3}(2-\sqrt{3})^n \right) x^n \end{aligned}$$

Los coeficientes de $A(x)$ y de $B(x)$ son, respectivamente, las sucesiones (a_n) y (b_n) que satisfacen el sistema de ecuaciones y las condiciones iniciales. ♣

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 12.4

12.4.1 *Para cada $n \ge 1$, sea a_n el número de n-listas con símbolos $\{0,1,2,3\}$ que tienen un número impar de ceros. Compruébese que $a_1 = 1$ y que $a_{n+1} = 2a_n + 4^n$ para cada $n \ge 1$. Dedúzcase, utilizando funciones generatrices, que $a_n = \frac{1}{2}(4^n - 2^n)$.*

12.4.2 *Consideremos la sucesión de números $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ que satisface la recurrencia:*

$$a_n = a_{n-2} + \binom{100}{n}, \qquad n \ge 2\,,$$

junto con las condiciones iniciales $a_0 = 1$ y $a_1 = 100$.

(a) Calcúlese la función generatriz de esta sucesión.

(b) Escríbase una fórmula para a_n y calcúlese a_{200}.

12.4.3 *Considérense las dos siguientes sucesiones de números:*

$$\begin{cases} a_1 &= 1 \\ a_k &= 1 + a_{k-1} + \sum_{j=1}^{k-1} a_j \quad \textit{para cada } k \geq 2. \end{cases} \qquad \begin{cases} A_0 &= 1 \\ A_n &= \sum_{k=0}^{n} k A_{n-k}\,, \qquad n \geq 1. \end{cases}$$

Obténganse las respectivas funciones generatrices y compruébese que $a_n = A_n = F_{2n}$ para cada $n \geq 1$.

12.4.4 *Para cada $n, k \geq 0$, llamemos $b(n,k)$ al número de subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ de tamaño k que no contienen enteros consecutivos (esta cuestión ya la tratamos en el ejercicio 3.1.15 y, con un lenguaje distinto, pero equivalente, en la subsección 6.3.5). Nótese que $b(n,k) = 0$ si $k > n$ y que $b(n,0) = 1$ si $n \geq 1$, $b(0,k) = 0$ si $k \geq 1$ y $b(n,1) = n$ si $n \geq 1$. Definamos $b(0,0) = 1$.*

(a) Pruébese que

$$b(n,k) = b(n-2, k-1) + b(n-1, k) \qquad \textit{si } n \geq 2,\ k \geq 1.$$

(b) Llamemos $F_k(x)$ a la función generatriz de los $b(n,k)$ para cada k fijo. Compruébese que

$$F_0(x) = \frac{1}{1-x}\,, \quad F_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\,, \quad F_k(x) = \frac{x^2}{1-x} F_{k-1}(x), \quad \textit{si } k \geq 2.$$

(c) Resuélvase la recurrencia para las funciones $F_k(x)$ y dedúzcase que

$$b(n,k) = \binom{n-k+1}{k}.$$

12.4.5 *Para $k \geq 1$ fijo, consideramos la sucesión de números de Stirling de segunda especie $(S(n,k))_{n=1}^{\infty}$ y su función generatriz asociada:*

$$F_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} S(n,k) x^n \qquad \textit{(nótese que la suma empieza realmente en } n = k\textit{).}$$

(a) Pruébese, utilizando la ecuación de recurrencia que verifican los números de Stirling de segunda especie, $S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$, que

$$F_1(x) = \frac{x}{1-x} \qquad \textit{y} \qquad F_k(x) = x\,F_{k-1}(x) + k\,x\,F_k(x) \qquad \textit{si } k \geq 2.$$

(b) Resuélvase la recurrencia y, utilizando fracciones simples, verifíquese que

$$F_k(x) = x^k \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1-jx} = x^k \sum_{j=1}^{k} \frac{\gamma_j}{1-jx}, \quad \textit{donde} \quad \gamma_j = (-1)^{k-j} \frac{j^{k-1}}{(j-1)!\,(k-j)!}\,.$$

(c) Desarróllense los términos $1/(1-jx)$ para deducir la habitual fórmula para los números de Stirling

$$S(n,k) = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{m=1}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} m^n\,.$$

12.4.6 *Vamos ahora a cambiar el punto de vista, para considerar, para $n \geq 1$ fijo, la función generatriz (en realidad, un polinomio) de la sucesión $(S(n,k))_{k=1}^{\infty}$ (nótese que ahora es k el índice de la sucesión),*

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} S(n,k)\,x^k\,.$$

En lugar de seguir el procedimiento del ejercicio anterior, vamos a considerar la función

$$T_n(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^n}{m!}\,x^m\,.$$

(a) Utilícese la identidad

$$k^n = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} j!\, S(n,j)$$

(véase el ejemplo 3.3.3*) para demostrar que*

$$T_n(x) = G_n(x)\, e^x.$$

(b) Así que $G_n(x) = e^{-x}\, T_n(x)$ *(¡curioso!, el producto de dos series infinitas como* e^{-x} *y* $T_n(x)$ *resulta ser un polinomio). Utilícese esta relación para obtener la fórmula para los* $S(n,k)$ *del ejercicio* 12.4.5.

(c) El número de Bell $B(n)$,

$$B(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) \qquad \text{para cada } n \geq 1,$$

cuenta el número de particiones en bloques no vacíos del conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$*, Sustitúyase* $x = 1$ *en la expresión del apartado (b) para obtener la* ***fórmula de Dobinski****:*

$$B(n) = \frac{1}{e} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^n}{j!} \qquad \text{para cada } n \geq 1,$$

que permite calcular $B(n)$ *en términos de una serie infinita que converge muy rápidamente. Por ejemplo,* $B(10) = 115975$*, mientras que la suma de los 15 primeros términos de la serie da* $\approx 115974{,}978$.

12.4.7 *Utilícese el ejercicio anterior para comprobar que, si definimos* $B(0) = 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B(n)}{n!} x^n = \exp\left(e^x - 1\right).$$

12.4.8 *Consideremos los números de Bell ordenados:*

$$\widetilde{B}(0) = 1 \quad y \quad \widetilde{B}(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)\, k! \quad \text{para cada } n \geq 1.$$

Estos números verifican la ecuación de recurrencia siguiente (véase el ejercicio 3.3.4*):*

$$\widetilde{B}(n) = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \widetilde{B}(n-j) \qquad \text{para cada } n \geq 1$$

(a) Compruébese que, si llamamos

$$\widetilde{B}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widetilde{B}(n)}{n!}\, x^n\,,$$

entonces

$$e^x\, \widetilde{B}(x) = 2\widetilde{B}(x) - 1.$$

(b) Así que

$$\widetilde{B}(x) = \frac{1}{2 - e^x}\,.$$

Desarróllese en serie de potencias esta función para obtener la siguiente fórmula "a la Dobinski":

$$\widetilde{B}(n) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^n}{2^{j+1}}\,.$$

12.5. Otras aplicaciones

La utilidad de las funciones generatrices no se limita a la resolución de ecuaciones de recurrencia. Se prestan también al cálculo de sumas (ya hemos visto algún ejemplo de ello), al de medias, desviaciones estándar (en general, momentos de una sucesión de números; estos cálculos los veremos en detalle, y con el lenguaje probabilístico correspondiente, en el capítulo 13); e incluso permiten entender de otra manera el principio de inclusión/exclusión (y versiones más generales de él). Veámoslo.

12.5.1. El método *curalotodo*

En páginas anteriores hemos conseguido calcular el valor de diversas sumas. En ocasiones, utilizando las reglas de manipulación de funciones generatrices (véanse algunos ejemplos de la sección 12.2); en otras, evaluando ciertas funciones generatrices en $x = 1$, quizás apelando al Lema de Abel (véanse, por ejemplo, varios ejercicios de la sección 12.3).

Lo que vamos a proponer aquí es un procedimiento "mecánico" para obtener el valor de sumas del tipo

$$a_n = \sum_k b_{kn}\,.$$

Para no perder generalidad, admitimos que los números b_{kn} puedan ser expresiones dependientes del índice de sumación k, e incluso de n. Tampoco fijamos *a priori* los límites de sumación, que podrían depender de n.

El paso clave del método que a continuación presentamos, y al que nos referiremos como el **método curalotodo**[21], es el intercambio en el orden de sumación, que por cierto hemos empleado ya en varias ocasiones en páginas anteriores. Este procedimiento, una guía ordenada de cómo utilizar todas nuestras habilidades con las funciones generatrices para la evaluación de sumas, consta de los siguientes pasos:

1. Empezamos, por supuesto, codificando la sucesión (a_n) con una función generatriz, $f(x) = \sum_n a_n\, x^n$.
2. Función que reescribimos como $f(x) = \sum_n \big(\sum_k b_{kn}\big)\, x^n$.
3. Con las precauciones que cada caso requiera, procedemos a intercambiar el orden de sumación:
$$f(x) = \sum_k \sum_n b_{kn}\, x^n\,.$$
4. Identificamos la serie de potencias interior y obtenemos una función (que quizás dependa de k) que llamamos $g_k(x)$:
$$f(x) = \sum_k g_k(x).$$
5. Hecho esto, evaluamos la *suma de funciones* para conseguir una expresión para $f(x)$.
6. El paso final consiste en desarrollar en serie de potencias la función $f(x)$ para obtener los a_n, sus coeficientes.

[21] En homenaje poco disimulado al *snake oil method* de Wilf.

Veámoslo en acción en un primer ejemplo sencillo.

Ejemplo 12.5.1 *Calculemos de nuevo la conocida suma* $a_n = \sum_{k=0}^{n} k$.

Empezamos con

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} k \Big) x^n.$$

Ahora intercambiamos el orden de sumación. Estamos sumando primero en k, con $0 \le k \le n$, y luego en n, con $0 \le n \le \infty$. Al cambiar el orden, sumaremos primero en n (y, por tanto, el índice n deberá cumplir que $k \le n \le \infty$) y luego en k, con $0 \le k \le \infty$. El resto son manipulaciones bien conocidas:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k \sum_{n=k}^{\infty} x^n = \sum_{k=0}^{\infty} k\, x^k \sum_{n=k}^{\infty} x^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} k\, x^k \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} k\, x^k\,.$$

De nuevo esta serie de potencias es conocida, es la que obtenemos al aplicar $x\,\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ a la serie básica $1/(1-x)$:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} k\, x^k = \frac{1}{1-x}\, x \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^3}\,.$$

Ya tenemos una expresión explícita de $f(x)$, que desarrollamos serie de potencias:

$$\frac{x}{(1-x)^3} = x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3-1}{3-1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} x^{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+1}{2} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+1}{2} x^k.$$

De aquí deducimos, finalmente, el bien conocido resultado $a_k = \binom{k+1}{2} = k(k+1)/2$. ♣

Ejemplo 12.5.2 *Calculemos las siguientes sumas (algo más complicadas):*

$$a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{2k} 2^{n-k}\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Observemos que la suma llega, en realidad, hasta $k = n$. Seguimos el procedimiento habitual:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{2k} 2^{n-k} \right) x^n = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n+k}{2k} (2x)^n.$$

Queremos calcular la suma en n; si el coeficiente binómico tuviera $2k$ arriba, casi lo tendríamos, porque conocemos el siguiente desarrollo (recordemos el ejemplo 12.1.1):

$$\frac{1}{(1-2\,x)^{2\,k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2\,k}{2\,k} (2x)^n\,.$$

Será cuestión de hacer que aparezca ese $2k$ arriba, a ver qué pasa. Pasa algo bueno:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{2k+n-k}{2k} (2x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} (2x)^k \sum_{n=k}^{\infty} \binom{2k+n-k}{2k} (2x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} (2x)^k \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+2k}{2k} (2x)^j = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \frac{1}{(1-2x)^{2k+1}} \\
&= \frac{1}{(1-2x)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{(1-2x)^2}\right)^k = \frac{1}{(1-2x)} \frac{1}{1-\frac{x}{(1-2x)^2}} = \frac{1-2x}{(1-4x)(1-x)}.
\end{aligned}$$

Ya tenemos la expresión de $f(x)$ (la hemos escrito separando las raíces del polinomio del numerador). Sólo resta desarrollarla en serie, para lo que utilizamos fracciones simples:

$$f(x) = \frac{1-2x}{(1-4x)(1-x)} = \frac{2/3}{1-4x} + \frac{1/3}{1-x} = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(4x)^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}4^n + \frac{1}{3}\right) x^n.$$

Identificando los coeficientes de $f(x)$ como los a_n, terminamos:

$$a_n = \frac{2}{3}4^n + \frac{1}{3} = \frac{2^{2n+1}+1}{3}.$$

♣

12.5.2. Certificación de identidades

Partimos de un par de sucesiones (a_n) y (b_n), y nuestro objetivo es probar que en realidad son la misma. Para ello, basta verificar que sus respectivas funciones generatrices coinciden. Veamos un ejemplo.

EJEMPLO 12.5.3 *Comprobemos que los números de Fibonacci satisfacen la relación*

$$F_0 + F_1 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1 \qquad \textit{para cada } n \geq 0.$$

Ésta es una identidad ya conocida, que se puede probar combinando inducción y la ecuación de recurrencia de los F_n, como proponíamos en el ejercicio 6.3.3. Abordémosla con funciones generatrices. Recordemos que $x/(1-x-x^2)$ es la función generatriz de los (F_n).

Por un lado,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} F_j\right)x^n = \frac{1}{1-x}\frac{x}{1-x-x^2},$$

pues, recordemos, el efecto de multiplicar por la serie básica $1/(1-x)$ es recuperar las sumas parciales de los coeficientes.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}(F_{n+2}-1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty} F_{n+2}x^{n+2} - \frac{1}{1-x} \\
&= \frac{1}{x^2}\left[\frac{x}{1-x-x^2} - F_0 - F_1 x\right] - \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x^2}\left[\frac{x}{1-x-x^2} - x\right] - \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)(1-x-x^2)}.
\end{aligned}$$

Y ya está: las funciones generatrices coinciden, así que sus coeficientes también. ♣

Ejemplo 12.5.4 *Otra identidad para los números de Fibonacci:*

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n-k} \quad \textit{para cada } n \geq 0.$$

La identidad de la izquierda la obtuvimos, con argumentos combinatorios, en la subsección 6.3.5; y ya con funciones generatrices, en el ejemplo 12.4.1. Si el lector escribe con detalle las dos sumas de la derecha, comprobará que efectivamente estamos sumando los mismos coeficientes binómicos, aunque en distinto orden. Para abordar la cuestión con funciones generatrices, recordamos ahora dos series ya conocidas que aparecerán durante los cálculos:

$$\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = x^k \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+k}{k} x^m = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j}{k} x^j \quad \text{y} \quad (1+x)^k = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{k}{j} x^j .$$

Aplicamos el método curalotodo. Para la primera,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-k}{k} x^n = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n-k}{k} x^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^m \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \frac{1}{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{1-x}\right)^k = \frac{1}{1-x} \frac{1}{1-x^2/(1-x)} = \frac{1}{1-x-x^2} . \end{aligned}$$

Y para la segunda,

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{n-k} x^n = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{n=k}^{\infty} \binom{k}{n-k} x^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{m=0}^{\infty} \binom{k}{m} x^m \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k (1+x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} [x(1+x)]^k = \frac{1}{1-x(1-x)} = \frac{1}{1-x-x^2} . \end{aligned}$$

Así que las tres cantidades son, después de todo, la misma. ♣

12.5.3. Funciones generatrices y principio de inclusión/exclusión

El objeto de esta subsección es aplicar las herramientas de las funciones generatrices para responder a cuestiones que van algo más allá de nuestro bien conocido principio de inclusión/exclusión, que luego aplicaremos al estudio de objetos familiares, como los desbarajustes o las aplicaciones sobreyectivas. La herramienta básica que emplearemos será la sustitución de unas series de potencias en otras, que describíamos en la regla 8 de la sección 12.2.

Planteemos ya la cuestión que nos interesa: tenemos un conjunto $\mathcal{X}$ finito y una serie de subconjuntos suyos, digamos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Para fijar ideas, identifiquemos cada subconjunto con una cierta propiedad. Esto es,

$$A_k = \{x \in \mathcal{X} \, : \, x \text{ cumple la propiedad } k\} \qquad \text{para cada } k = 1, 2, \ldots, n.$$

La pregunta a la que responde el principio de inclusión/exclusión habitual es

$\boxed{\text{Pregunta 1}}$ ¿Cuántos elementos de $\mathcal{X}$ cumplen *al menos* una de esas propiedades?

La respuesta es bien conocida: hemos de hallar el tamaño de la unión de los A_k:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1}\, \alpha_r\,,$$

donde

$$\alpha_r = \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_r}| \qquad \text{para cada } 1 \le r \le n.$$

Es decir,

$$\alpha_1 = \sum_{j=1}^{n} |A_j|\,, \quad \alpha_2 = \sum_{i<j} |A_i \cap A_j|\,, \qquad \cdots \qquad \alpha_n = |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|\,.$$

Para completar la sucesión $(\alpha_r)_{r=0}^{\infty}$, y por conveniencia, definimos $\alpha_0 = |\mathcal{X}|$. Nótese que la sucesión tiene un número finito de términos.

Planteamos ahora otra pregunta, con la que ganaremos algo de perspectiva:

$\boxed{\text{Pregunta 2}}$ ¿Cuántos elementos de $\mathcal{X}$ cumplen *exactamente* t de esas propiedades?

Son, en realidad, múltiples preguntas, una por cada valor de t entre 0 y n. Nos interesan los números $\beta_t = |B_t|$, los tamaños de los conjuntos

$$B_t = \{\text{elementos de } \mathcal{X} \text{ que pertenecen a exactamente } t \text{ de los } A_j\} \qquad \text{para cada } t \ge 0.$$

Así que esta segunda pregunta está asociada a una sucesión (β_t) que, de nuevo, sólo tiene un número finito de términos. Observemos que los conjuntos $B_0, B_1, \ldots, B_n$ forman, a diferencia de $A_1, \ldots, A_n$, una verdadera partición de $\mathcal{X}$.

Buscamos relaciones entre las dos sucesiones de números, (α_r) y (β_t). La primera la descubrimos de inmediato: como hemos llamado $\alpha_0 = |\mathcal{X}|$,

$$\alpha_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta_t\,,$$

sin más que recordar que los conjuntos B_t forman una partición de $\mathcal{X}$.

Vamos, sin embargo, a obtener este resultado con un argumento de doble conteo, para preparar el argumento general que aplicaremos en los otros casos.

Construimos una matriz cuyas columnas están etiquetadas con los elementos de $\mathcal{X}$ ordenados según el conjunto B_t al que pertenezcan: para distinguirlos, llamemos $x_1, \ldots, x_{\beta_0}$ a los elementos de $\mathcal{X}$ que estén en B_0, $y_1, \ldots, y_{\beta_1}$ a los que estén en B_1, y así, sucesivamente, hasta $w_1, \ldots, w_{\beta_n}$ a los de B_n. Y que tenga una sola fila, etiquetada con $\mathcal{X}$. Escribimos un 1 si el elemento está en $\mathcal{X}$ y un 0 en caso contrario:

	B_0			B_1			$\cdots$	B_n		
	x_1	$\cdots$	x_{β_0}	y_1	$\cdots$	y_{β_1}	$\cdots$	w_1	$\cdots$	w_{β_n}
$\mathcal{X}$	1	$\cdots$	1	1	$\cdots$	1	$\cdots$	1	$\cdots$	1

Por supuesto, todas las entradas de la matriz son unos, porque cada elemento de cada columna pertenece a $\mathcal{X}$. Estos unos, sumados por filas, dan $|\mathcal{X}|$; y sumados por columnas, $\sum_{t=0}^{\infty} \beta_t$.

Vamos con α_1. Construimos una matriz similar, aunque esta vez colocamos, como etiquetas de las filas, los distintos conjuntos $A_1, \dots, A_n$. Cada entrada de la matriz será un 1 si el elemento que determina la columna está en el A_r de la fila; y un 0 en caso contrario.

		B_0			B_1			B_2		$\cdots$		B_n	
	x_1	$\cdots$	x_{β_0}	y_1	$\cdots$	y_{β_1}	z_1	$\cdots$	z_{β_2}	$\cdots$	w_1	$\cdots$	w_{β_n}
A_1	0	$\cdots$	0	1	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	1
A_2	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	1
A_3	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	1	$\cdots$	1	$\cdots$	1	$\cdots$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_n	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	1	0	$\cdots$	1	$\cdots$	1	$\cdots$	1

Los elementos de B_0, los x_j, no pertenecen a ninguno de los A_r, pues no cumplen propiedad alguna; así que sus columnas llevarán ceros. Cada $y_j \in B_1$ cumple una única propiedad, está en *uno* (y sólo uno) de los A_r, así que en su columna habrá un único 1. Si $z_j \in B_2$, z_j cumplirá dos propiedades, es decir, estará en dos A_r distintos. Por tanto, en su columna habrá dos unos. Y así, sucesivamente: en la columna de un elemento de B_t habrá t unos.

Si ahora sumamos las entradas de la matriz por filas, obtenemos la suma de todos los $|A_r|$. Si sumamos por columnas, las correspondientes a B_0 aportarán cero unos (más concretamente, $0\,\beta_0$), las de B_1 aportarán un 1 cada una; en total, $1\,\beta_1$. Las de B_2, un 2 cada una, es decir, $2\,\beta_2$ entre todas, y así sucesivamente. Es decir, que

$$\alpha_1 = \sum_{r=0}^{\infty} |A_r| = \sum_{t=0}^{\infty} t\,\beta_t\,.$$

Vamos con α_2. Ahora, la matriz tendrá etiquetadas sus filas con todas las posibles intersecciones dos a dos de los A_r. Y colocaremos un uno si el elemento que determina la columna está en el $A_i \cap A_j$ que define la fila:

		B_0			B_1			B_2		$\cdots$		B_n	
	x_1	$\cdots$	x_{β_0}	y_1	$\cdots$	y_{β_1}	z_1	$\cdots$	z_{β_2}	$\cdots$	w_1	$\cdots$	w_{β_n}
$A_1 \cap A_2$	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	1
$A_1 \cap A_3$	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	1
$A_1 \cap A_4$	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	1	$\cdots$	1	$\cdots$	1	$\cdots$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$A_{n-1} \cap A_n$	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	1	$\cdots$	1	$\cdots$	1

Las columnas de los elementos de B_0 y B_1 sólo contienen ceros, porque ninguno de ellos cumple dos propiedades a la vez. Sea un $z_j \in B_2$: este elemento cumple *exactamente* dos propiedades, así que estará *exactamente* en una de las intersecciones dos a dos. Por tanto, en su columna habrá un uno, y el resto serán ceros. Cualquier $u_j \in B_3$ (que ya no representamos en la tabla) cumplirá tres propiedades, es decir, estará en tres de los A_r. Por lo tanto, estará en $\binom{3}{2}$ intersecciones dos a dos distintas (por ejemplo, si está en A_1, A_2 y A_3, estará en $A_1 \cap A_2$, $A_2 \cap A_3$ y $A_1 \cap A_3$). Luego habrá $\binom{3}{2}$ unos en su columna. Si tenemos un elemento de B_4, estará en $\binom{4}{2}$ intersecciones dos a dos; es decir, habrá $\binom{4}{2}$ unos en su columna.

Argumentando de la misma manera para el resto de los elementos, obtenemos que

$$\alpha_2 = \sum_{i\neq j} |A_i \cap A_j| = \sum_{t=0}^{\infty} \binom{t}{2} \beta_t\,.$$

El argumento general nos lleva a la relación

$$\boxed{\alpha_r = \sum_{t=0}^{\infty} \binom{t}{r} \beta_t} \qquad \text{para cada } r = 0, 1, 2 \dots, n,$$

que nos permite conocer la sucesión (α_r) si es que disponemos de los números (β_t). Nótese que, en realidad, los límites de la suma son más pequeños, tanto el inferior (empieza en $t = r$, por el coeficiente binómico) como el superior (porque los β_t se anulan a partir de n).

A. Inversión de la relación con funciones generatrices

Pero, como veremos más adelante, en muchas de las aplicaciones de interés dispondremos de expresiones explícitas de los números α_r. Si queremos obtener a partir de ellas las correspondientes a los β_t, necesitaremos **invertir** la relación de arriba, es decir, escribir los (β_t) en función de los (α_r). Para ello, por supuesto, recurriremos a las funciones generatrices; llamemos $A(x)$ y $B(x)$ a las asociadas a los α_r y los β_t, respectivamente:

$$A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r\, x^r \qquad \text{y} \qquad B(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta_t\, x^t\,.$$

Como $B(x)$ genera la sucesión (β_t), aplicando la regla 8 de la sección 12.2, deducimos que

$$B(1+x) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{t=0}^{\infty} \binom{t}{r} \beta_t \right) x^r = A(x)\,,$$

pues los coeficientes son, justamente, los α_r. Hemos codificado así las relaciones entre las sucesiones (α_r) y (β_t) con una única relación funcional entre sus funciones generatrices $A(x)$ y $B(x)$. Ahora invertimos esta relación funcional,

$$B(x) = A(x-1)\,,$$

y recogemos los frutos:

$$\begin{aligned} B(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta_t\, x^t &= A(x-1) = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r\,(x-1)^r = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r\,(-1)^r\,(1-x)^r \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r\,(-1)^r \sum_{t=0}^{\infty} \binom{r}{t}\,(-x)^t = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{r+t} \binom{r}{t}\, \alpha_r \right) x^t\,. \end{aligned}$$

Ya tenemos la expresión que buscábamos:

$$\boxed{\beta_t = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{r-t} \binom{r}{t} \alpha_r} \qquad \text{para cada } t = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Analicemos ahora, con el lenguaje de las funciones generatrices, algunos ejemplos que ya estudiamos en su momento con argumentos de tipo combinatorio.

Ejemplo 12.5.5 *Sobre permutaciones y desbarajustes.*

Sea $\mathcal{X}$ el conjunto de las permutaciones de $\{1,\dots,n\}$, de las que hay $\alpha_0 = |\mathcal{X}| = n!$. Definimos, para cada $1 \le r \le n$, los conjuntos

$$A_r = \{\text{permutaciones de } \{1,\dots,n\} \text{ con el símbolo } r \text{ en la posición } r\text{-ésima}\}\,.$$

En cada A_r están todas las permutaciones que fijan el elemento r en su posición. Como ya vimos en el ejemplo 3.1.5, el tamaño de cada A_r es

$$\alpha_r = \binom{n}{r}(n-r)!\,,$$

lo que nos permite concluir que el número de desbarajustes de $\{1,\dots,n\}$ es

$$D_n = \Big|\mathcal{X} \setminus \bigcup_{r=1}^{n} A_r\Big| = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \alpha_r = n! \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{r!}\,.$$

Este resultado es inmediato en nuestro nuevo lenguaje: los desbarajustes son las permutaciones que no fijan símbolo alguno en su posición, así que no están en ninguno de los A_r; hay β_0 elementos de éstos, luego

$$D_n = \beta_0 = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \alpha_r \binom{r}{0} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \alpha_r = n! \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{r!}\,.$$

Pero nuestro análisis da respuesta a preguntas más complicadas. Por ejemplo, el número de permutaciones de $\{1,\dots,n\}$ que fijan exactamente t símbolos es, en nuestro lenguaje, β_t. Si $t > n$, no hay tales permutaciones; en el resto de los casos, cuando $0 \le t \le n$,

$$\begin{aligned}
\beta_t &= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{r-t} \alpha_r \binom{r}{t} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{r-t} \binom{n}{r} (n-r)! \binom{r}{t} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{r-t} \frac{r!}{t!(r-t)!} \frac{n!}{r!(n-r)!} (n-r)! = s \sum_{r=0}^{n} (-1)^{r-t} \frac{n!}{r!} \binom{r}{t} = \frac{n!}{t!} \sum_{r=t}^{n} \frac{(-1)^{r-t}}{(r-t)!}
\end{aligned}$$

(el caso $t=0$ se corresponde con los desbarajustes).

Si simplificamos un poco esta expresión, recuperamos una identidad ya conocida:

$$\beta_t = \frac{n!}{t!} \sum_{r=t}^{n} \frac{(-1)^{r-t}}{(r-t)!} = \binom{n}{t} (n-t)! \sum_{r=t}^{n} \frac{(-1)^{r-t}}{(r-t)!} = \binom{n}{t} (n-t)! \sum_{m=0}^{n-t} \frac{(-1)^m}{m!} = \binom{n}{t} D_{n-t}\,.$$

Esta identidad (que ya pedíamos probar en el ejercicio 3.1.29) nos dice, simplemente, que si queremos formar una permutación de $\{1,\dots,n\}$ que fije t símbolos, primero habremos de decidir qué t símbolos fijamos y luego hacer un desbarajuste con el resto. ♣

Ejemplo 12.5.6 *Sobre aplicaciones y números de Stirling.*

Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de las k^n aplicaciones entre los conjuntos $\mathcal{X} = \{1, \dots, n\}$ y $\mathcal{Y} = \{1, \dots, k\}$. Definimos

$$A_r = \{\text{aplicaciones } \mathcal{X} \to \mathcal{Y} \text{ tales que } r \text{ no está en la imagen}\}, \quad \text{para cada } r = 1, \dots, k.$$

Ya vimos, en el ejemplo 3.1.4, que los α_r asociados a estos conjuntos venían dados por

$$\alpha_r = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_r}| = \binom{k}{r} (k-r)^n, \quad \text{para cada } r = 1, \dots, k.$$

Conviene definir, además, $\alpha_0 = |\mathcal{A}| = k^n$; y, por supuesto, $\alpha_r = 0$ si $r > k$.

Ahora consideramos, para cada $t \ge 0$, los conjuntos

$$B_t = \left\{ \begin{array}{c} \text{elementos de } \mathcal{A} \text{ que están} \\ \text{en exactamente } t \text{ de los } A_j \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{aplicaciones } \mathcal{X} \to \mathcal{Y} \text{ que se} \\ \text{“saltan” } t \text{ elementos de } \mathcal{Y} \end{array} \right\}$$

y llamemos β_t a sus tamaños. Claramente, $\beta_t = 0$ si $t > k$. El caso β_0 es especial: es el número de aplicaciones sobreyectivas (las que no se “saltan” ningún elemento de $\mathcal{Y}$) de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$.

Sabemos que los β_t y los α_r están relacionados mediante la siguiente fórmula:

$$\beta_t = \sum_r (-1)^{r-t} \binom{r}{t} \alpha_r .$$

Por ejemplo, para $t = 0$, obtenemos la fórmula del ejercicio 3.1.4 para el número de aplicaciones sobreyectivas de $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$:

$$\beta_0 = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{k}{r} (k-r)^n = (-1)^k \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} m^n .$$

En el caso general,

$$\begin{aligned} \beta_t &= \sum_{r=t}^{k} (-1)^{r-t} \binom{r}{t} \binom{k}{r} (k-r)^n = \sum_{m=0}^{k-t} (-1)^{k-m-t} \binom{k-m}{t} \binom{k}{k-m} m^n \\ &= (-1)^{k-t} \frac{k!}{t!} \sum_{m=0}^{k-t} \frac{(-1)^m\, m^n}{m!\,(k-m-t)!} = \binom{k}{t} (-1)^{k-t} \sum_{m=0}^{k-t} (-1)^m \binom{k-t}{m} m^n \end{aligned}$$

Comparando con la expresión de β_0 que teníamos arriba, descubrimos que

$$\beta_t = \binom{k}{t} \#\{\text{aplicaciones sobreyectivas } \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, k-t\}\} .$$

Lo que tampoco nos sorprende: si queremos construir aplicaciones que se salten t elementos de la imagen, los elegimos primero y luego establecemos una aplicación sobreyectiva al resto de los $k - t$ elementos.

Pero tenemos unos números estrechamente ligados con este problema, los $S(n, k)$, los números de Stirling de segunda especie. Recordemos de la subsección 3.3.1 que aplicaciones sobreyectivas de $\{1, \dots, n\}$ en $\{1, \dots, k\}$ hay exactamente $k!\, S(n, k)$.

Así que, de la expresión de β_0 obtenemos la habitual fórmula para los $S(n,k)$:

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{k}{r} (k-r)^n .$$

Los β_t se escriben en función de números de Stirling de la siguiente manera:

$$\beta_t = \binom{k}{t} (k-t)!\, S(n, k-t) .$$

Y como los B_t son una partición de $\mathcal{A}$, el conjunto total de las aplicaciones $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$,

$$\alpha_0 = k^n = \sum_{t=0}^{k} \beta_t = \sum_{t=0}^{k} \binom{k}{t} (k-t)!\, S(n, k-t) ,$$

una fórmula que ya aparecía en el ejemplo 3.3.3. ♣

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 12.5

12.5.1 *Utilícese el método curalotodo para comprobar que*

$$(a) \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} . \qquad (b) \quad \sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n} .$$

12.5.2 *Fijemos un número natural m. Demuéstrese que, para todo $n \geq 1$, $a_n = b_n$, donde*

$$a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} \binom{n+k}{m} \qquad y \qquad b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} \binom{n}{k} 2^k .$$

12.5.3 *Consideremos las aplicaciones de un conjunto X de n elementos en un conjunto Y de n elementos. Demuéstrese que el número medio de elementos en la imagen de una tal aplicación es*

$$n - \frac{n(n-1)^n}{n^n}$$

y que, por consiguiente, para n grande ese número medio es aproximadamente $n\big(1 - 1/e\big)$.

12.5.4 *Sean (α_r) y (β_t) dos sucesiones relacionadas mediante*

$$\alpha_r = \sum_{t=0}^{\infty} \binom{r}{t} (-1)^t \beta_t \qquad \text{para cada } r = 0, 1, 2, \dots$$

Llamemos $A(x)$ y $B(x)$ a las funciones generatrices asociadas a las sucesiones (α_n) y (β_n).
(a) Compruébese que

$$A(x) = \frac{1}{1-x} B\Big(\frac{x}{1-x}\Big) \quad \text{y que, por tanto,} \quad B(y) = \frac{1}{1-y} A\Big(\frac{y}{y-1}\Big) .$$

(b) Dedúzcase que

$$\beta_t = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{t}{r} (-1)^r \alpha_r \qquad \text{para cada } t = 0, 1, 2, \dots$$