Capítulo 3

Las estructuras básicas de la Combinatoria

Cuando contamos y enumeramos, cuando hacemos Combinatoria, aparecen con frecuencia unas estructuras básicas que merecen nombres y análisis específicos. Así, cada vez que, tras meditar detenidamente sobre una cierta cuestión combinatoria, identifiquemos los objetos de interés (por ejemplo, particiones de un conjunto en bloques no vacíos), sabremos que la respuesta será la correspondiente familia de números (para el caso, números de Stirling). Este capítulo será una suerte de muestrario de estas estructuras básicas: explicaremos los contextos en las que aparecen y aprenderemos a contar cuántas de ellas hay, en cada caso.

Prepárese el lector, pues, para una excursión, casi taxonómica, en la que irá descubriendo paulatinamente las principales familias, algunos de los géneros, y hasta alguna que otra especie, que pueblan el hábitat combinatorio: subconjuntos, permutaciones, particiones en bloques, en ciclos, de enteros. . .

En realidad, ya iniciamos esta excursión en el capítulo anterior, en el que presentamos diversos tipos de *listas* (con y sin repetición, circulares, etc.). Recomendamos al lector que que tenga presentes los resultados que allí obtuvimos, porque aparecerán continuamente en los argumentos combinatorios que siguen.

3.1. Subconjuntos. Coeficientes binómicos

Sea A un conjunto con $n \geq 1$ elementos. Para las cuestiones que nos interesan, los nombres de los elementos de A no desempeñan papel alguno, así que, por concreción y conveniencia, supondremos que A es el conjunto $\{1, \dots, n\}$. Queremos saber cuántos subconjuntos (sin repetición) distintos de tamaño k podemos extraer de él. Por ejemplo, si $n = 4$ y $k = 2$, hay seis 2-subconjuntos: $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$ y $\{3, 4\}$. Llamemos

$$C(n, k) = \#\{k\text{-subconjuntos extraídos de un conjunto de } n \text{ elementos}\}\,.$$

El parámetro k, que indica el tamaño de los subconjunto que nos interesan, puede tomar en principio los valores $k = 0, 1, 2, \dots$ Pero si $k > n$, entonces $C(n, k) = 0$, pues resulta imposible construir un subconjunto con más elementos de los que tiene el conjunto de partida.

Así que situémonos en el rango de interés: para un cierto $n \geq 1$ y para cada $0 \leq k \leq n$. Si nuestro objetivo fuera contar el número de *listas* de longitud k y sin repetición que podemos formar con n símbolos, la respuesta sería

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}\,,$$

como vimos en la subsección 2.2.1. Consideremos ahora una cualquiera de ellas: en sus k posiciones tiene símbolos distintos, así que podremos reordenarla de $k!$ maneras distintas. La observación clave es que cada una de estas $k!$ posibles reordenaciones da lugar, si nos olvidamos del orden de presentación de los símbolos, a un *único* conjunto de tamaño k.

Por tanto, podemos relacionar cada $k!$ listas (en las que sí es relevante el orden) con un solo conjunto (en el que el orden no es relevante). Esta aplicación $k!$ a 1 entre el conjunto de las k-listas sin repetición formadas con símbolos $\{1,\dots,n\}$ y la colección de k-subconjuntos de $\{1,\dots,n\}$ nos permite concluir que, para cada $n \geq 1$,

$$C(n,k) = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n; \\ 0 & \text{si } k > n. \end{cases}$$

con el convenio habitual de que $0! = 1$. Obsérvese que de este análisis combinatorio se deduce que la fracción $\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ es un entero, algo que no es sencillo comprobar algebraicamente.

Es tradicional designar al cociente de factoriales de la fórmula anterior con el siguiente símbolo:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

(se lee "n sobre k"). Estos números son conocidos como **coeficientes binómicos**[1] y están, en principio, definidos para cada entero positivo n y para cada $0 \leq k \leq n$. El lector podrá comprobar que

$$\binom{n}{n} = 1 \qquad \text{y} \qquad \binom{n}{0} = 1$$

(utilizando de nuevo que $0! = 1$). Unos valores que son consistentes con la interpretación combinatoria que aquí estamos considerando: por un lado, $C(n,n) = 1$, porque el único conjunto con n elementos que se puede extraer de un conjunto de n elementos es el propio conjunto; y, por otro, $C(n,0) = 1$, puesto que sólo hay un conjunto de tamaño cero que podemos extraer del conjunto $\{1,\dots,n\}$, el conjunto vacío $\emptyset$.

En lo que sigue, para evitar una proliferación innecesaria de símbolos, y salvo alguna reaparición esporádica de la notación $C(n,k)$, diremos que, dado $n \geq 1$, *el número de subconjuntos de tamaño k que podemos extraer del conjunto* $\{1,\dots,n\}$, esto es, el número de maneras en que podemos seleccionar k símbolos de entre una colección de n, viene dado por $\binom{n}{k}$, con el convenio adicional de que este coeficiente binómico es 0 para los valores de k que quedan fuera del rango $0 \leq k \leq n$.

[1] Así llamados porque se obtienen en el desarrollo del binomio de Newton (véase la subsección 3.1.2).

Aunque en la subsección 3.1.3 presentaremos algunas aplicaciones combinatorias interesantes de estos números, ahí va un primer ejemplo simpático, para que el lector empiece a captar su utilidad.

Ejemplo 3.1.1 ***La ley de Murphy y los calcetines***. *Tenemos diez pares de calcetines (distintos) y desaparecen seis calcetines (escogidos al azar). ¿Qué es más probable, que nos queden cuatro pares útiles (el caso malo) o que nos queden siete pares útiles (el bueno)*[2] *?*

Lo adivinó: la ley de Murphy es cierta, es más probable que nos queden sólo 4 pares. Etiquetemos los calcetines según la pareja a la que pertenezcan y si son derecho o izquierdo:

$$D_1, I_1,\ D_2, I_2,\ \dots\ D_{10}, I_{10}\,.$$

Como en el ejemplo 2.2.4, apelaremos a la noción de probabilidad como cociente del número de casos favorables entre el total. Hay $\binom{20}{6}$ posibles "desapariciones" distintas, pues hay que elegir 6 de los 20 calcetines. Si han de quedar 7 pares útiles, la única posibilidad es que hayan desaparecido tres pares completos. Para contar los casos favorables, basta elegir esas tres parejas (de entre las 10 que hay). Así que, si llamamos p_7 a la probabilidad de tener 7 pares útiles,

$$p_7 = \frac{\binom{10}{3}}{\binom{20}{6}} = \frac{1}{323}\,.$$

Si quedan 4 parejas útiles, sólo puede ser porque haya desaparecido un calcetín de cada una de las otras seis. Así que decidimos primero qué cuatro parejas quedan íntegras ($\binom{10}{4}$ posibilidades) y luego qué seis calcetines desaparecen: uno de la primera pareja que queda (2 posibilidades), otro de la segunda (otras 2 posibilidades), etc. En total, hay 2^6 posibles "desapariciones". Así que

$$p_4 = \frac{\binom{10}{4}\,2^6}{\binom{20}{6}} = \frac{112}{323}\,.$$

¡Es 112 veces más probable estar en el caso malo! Pero no desesperemos: en realidad, lo más probable es que nos queden 5 pares útiles. Podemos analizar este caso con el siguiente argumento: elegimos los 5 pares que quedan completos ($\binom{10}{5}$ maneras) y, de los restantes 5 pares, uno ha de desaparecer completo (5 posibilidades), y del resto hemos de elegir qué calcetín desaparece (2^4 maneras). En total,

$$p_5 = \frac{\binom{10}{5}\,5\times 2^4}{\binom{20}{6}} = \frac{168}{323}\,.$$

El último caso (6 pares útiles) requeriría elegir los 6 pares íntegros, y de los otros cuatro, elegir los dos que desaparecen completos y tomar un calcetín de las otras dos parejas:

$$p_6 = \frac{\binom{10}{6}\binom{4}{2}\,2^2}{\binom{20}{6}} = \frac{42}{323}\,.$$

Obsérvese el permanente uso de la regla del producto que hemos hecho en estos cálculos. Compruébese también que $p_4 + p_5 + p_6 + p_7 = 1$. ♣

[2] Nótese que, en esta desastrosa circunstancia, por lo demás bastante habitual, no pueden quedar más de 7 pares íntegros, y que siempre quedan al menos 4.

3.1.1. Propiedades de los coeficientes binómicos

Vamos a enunciar unas cuantas propiedades útiles de los coeficientes binómicos, que comprobaremos con argumentos algebraicos y combinatorios.

A. Simetría

La propiedad que nos disponemos a demostrar es la siguiente:

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}} \qquad \text{para } n \geq 1 \text{ y } 0 \leq k \leq n,$$

La razón por la que hablamos de propiedad de "simetría" resultará evidente cuando, unas páginas más adelante, dispongamos los coeficientes binómicos en un triángulo.

La prueba algebraica es muy sencilla:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}.$$

Pero es más interesante confirmar esta propiedad utilizando argumentos combinatorios. Llamemos

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{array}{c} \text{subconjuntos de tamaño } k \\ \text{extraídos de } \{1,\dots,n\} \end{array} \right\} \quad \text{y} \quad \Gamma_2 = \left\{ \begin{array}{c} \text{subconjuntos de tamaño } n-k \\ \text{extraídos de } \{1,\dots,n\} \end{array} \right\}.$$

A cada subconjunto B de tamaño k (es decir, incluido en Γ_1) le podemos asociar el subconjunto de tamaño $n-k$ (que estará incluido en Γ_2) formado por todos los elementos de $\{1,\dots,n\}$ que no están en B, esto es, $\{1,\dots,n\} \setminus B$.

Construimos así una aplicación entre los conjuntos Γ_1 y Γ_2 que, como podrá comprobar sin dificultad el lector, es biyectiva. De lo que se deduce que ambos conjuntos han de tener el mismo tamaño. Es decir, que las cantidades

$$|\Gamma_1| = \binom{n}{k} \qquad \text{y} \qquad |\Gamma_2| = \binom{n}{n-k}$$

han de ser iguales.

B. Suma de los coeficientes binómicos

La segunda propiedad da cuenta del valor de la *suma de todos* los coeficientes binómicos de índice superior fijo: para cada $n \geq 1$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$$

La prueba algebraica, manipulando los factoriales que aparecen en la suma, es una tarea muy laboriosa. Sin embargo, es sencillo construir una prueba por inducción, y animamos al lector a completarla (ejercicio 3.1.1). Veremos también una demostración alternativa, utilizando el teorema del binomio, en la subsección 3.1.2.

La prueba combinatoria es trasparente. Sabemos que $\binom{n}{k}$ cuenta, para cada $0 \le k \le n$, el número de subconjuntos de tamaño k que podemos extraer del conjunto $A = \{1, \dots, n\}$. Llamemos Γ al conjunto de todos los posibles subconjuntos de A. Sabemos (recuérdese el ejemplo 2.2.2) que el conjunto Γ tiene tamaño 2^n. Definamos además

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \{\text{subconjuntos de } A \text{ de tamaño } 0\} \\ \Gamma_1 &= \{\text{subconjuntos de } A \text{ de tamaño } 1\} \\ &\vdots \\ \Gamma_n &= \{\text{subconjuntos de } A \text{ de tamaño } n\}. \end{aligned}$$

Los conjuntos $\{\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n\}$ constituyen una partición de Γ (¡compruébese!). Así que, con la regla de la suma, concluimos que

$$|\Gamma| = \sum_{j=0}^{n} |\Gamma_j| \quad ; \qquad \text{es decir,} \qquad 2^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}.$$

Podemos reinterpretar esta relación en términos de listas. Recuerde el lector la *identificación entre subconjuntos y listas de ceros y unos* del ejemplo 2.2.2: dar un subconjunto de $\{1, \dots, n\}$ es exactamente lo mismo que construir una n-lista con ceros y unos (si hay un 1 en la posición j-ésima de la lista, el elemento j está en el subconjunto; y si aparece un 0, no estará).

En la fórmula anterior, a la izquierda, tenemos el número total de n-listas con ceros y unos, 2^n. Y a la derecha, las tenemos clasificadas en función del número de unos que tengan. Es decir,

$$\binom{n}{k} = \#\left\{ \begin{array}{c} \text{listas de longitud } n \text{ formadas con ceros} \\ \text{o unos que tienen exactamente } k \text{ unos} \end{array} \right\}.$$

puesto que para dar una lista con k unos basta decidir qué posiciones llevan esos unos y hay $\binom{n}{k}$ maneras de hacerlo).

C. Regla de recurrencia

La siguiente regla de recurrencia para los coeficientes binómicos nos permitirá calcularlos de manera muy eficiente. Dice así: dado $n \ge 2$ y para cada $1 \le k \le n-1$,

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}}$$

La prueba algebraica es sencilla y directa:

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n-k}{n}\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{k}{n}\frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \binom{n}{k} \underbrace{\left[\frac{n-k}{n} + \frac{k}{n}\right]}_{=1} = \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

Para la comprobación combinatoria, construimos la siguiente partición:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Subconjuntos de}\\ \text{tamaño } k \text{ extraídos}\\ \text{de } \{1,\dots,n\}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{Subconjuntos de tamaño } k\\ \text{extraídos de } \{1,\dots,n\}\\ \text{que contienen al elemento } n\end{array}\right\} \cup \left\{\begin{array}{c}\text{Subconjuntos de tamaño } k\\ \text{extraídos de } \{1,\dots,n\}\\ \text{que } \textit{no} \text{ contienen al elemento } n\end{array}\right\}$$

Por supuesto, la elección del elemento n, el último, para este proceso es totalmente arbitraria (podíamos haber elegido, por ejemplo, el primero). El conjunto de la izquierda, ya lo sabemos, tiene tamaño $\binom{n}{k}$, y la regla de la suma nos permite escribir que

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \#\left\{\begin{array}{c}\text{Subconjuntos de tamaño } k\\ \text{extraídos de } \{1,\dots,n\}\\ \text{que contienen al elemento } n\end{array}\right\} + \#\left\{\begin{array}{c}\text{Subconjuntos de tamaño } k\\ \text{extraídos de } \{1,\dots,n\}\\ \text{que } \textit{no} \text{ contienen al elemento } n\end{array}\right\}\\ &= \#\left\{\begin{array}{c}\text{Subconjuntos de tamaño } k-1\\ \text{extraídos de } \{1,\dots,n-1\}\end{array}\right\} + \#\left\{\begin{array}{c}\text{Subconjuntos de tamaño } k\\ \text{extraídos de } \{1,\dots,n-1\}\end{array}\right\}\\ &= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.\end{aligned}$$

La penúltima igualdad es la clave del argumento, y está basada en un par de biyecciones. Para el primer término argumentamos así: para construir todos los subconjuntos de tamaño k con los elementos $\{1,\dots,n\}$ que contengan al elemento n, basta decidir quiénes son sus $k-1$ acompañantes, es decir, basta elegir $k-1$ elementos del conjunto $\{1,\dots,n-1\}$. Para el segundo término, como los subconjuntos que estamos considerando en este caso no contienen a n, tendremos que escoger los k elementos de entre los del conjunto $\{1,\dots,n-1\}$.

FIGURA 3.1: Tartaglia

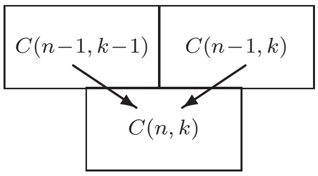
La combinación de esta regla de recurrencia y lo que por razones que se entenderán en un momento llamaremos los *valores frontera*,

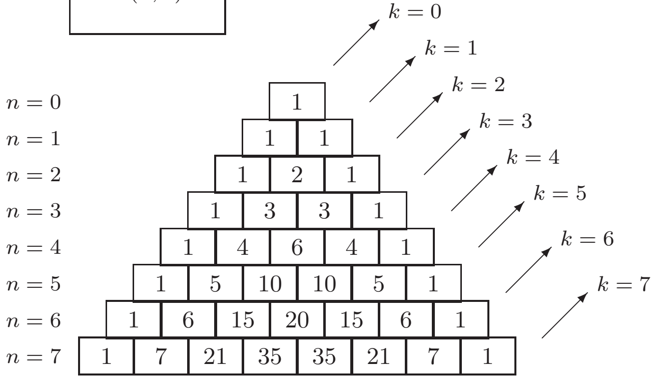
$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \text{y} \qquad \binom{n}{n} = 1\,, \qquad \text{para cada } n \geq 1,$$

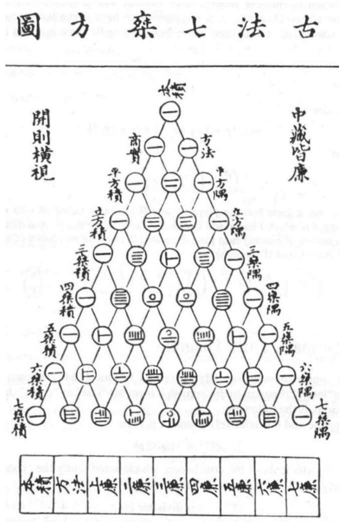
nos permite calcular y codificar los valores de todos los coeficientes binómicos. Para ello, es costumbre utilizar el llamado **triángulo de Pascal-Tartaglia**[3]: un triángulo formado por casillas que van etiquetadas con dos parámetros, n y k. El parámetro n etiqueta los "pisos" del triángulo, empezando en $n=0$, mientras que el parámetro k, por su parte, marcará la coordenada de las sucesivas diagonales, de nuevo de $k=0$ en adelante. En la casilla de coordenadas n y k situamos el número $C(n,k)$, o indistintamente $\binom{n}{k}$.

[3]A veces sólo triángulo de Tartaglia, a veces sólo triángulo de Pascal. Niccolo Fontana (1499-1557) es más conocido como Tartaglia (tartamudo; o tartaja, más catizo y un punto despectivo). Parece ser que de pequeño fue gravemente herido en la cara por las tropas francesas que ocupaban Brescia, su localidad natal, y que de aquel episodio conservó una gran cicatriz en el rostro y ciertas dificultades para hablar. Tradujo y publicó numerosas obras matemáticas clásicas, como los *Elementos* de Euclides y algunos tratados de Arquímedes. Consiguió, entre otros logros, obtener una fórmula para la resolución de la ecuación cúbica (véase la nota al pie de la página 20).

Para que todo cuadre, es conveniente decidir que $C(0,0)=1$; una definición consistente con la fórmula de los factoriales, aunque sin aparente significado combinatorio[4]. Los valores en los bordes (las fronteras) del triángulo son siempre 1. Y las casillas interiores se rellenan siguiendo la ecuación de recurrencia, cuya interpretación gráfica aparece debajo de estas líneas, a la izquierda: cada coeficiente binómico se obtiene sumando los valores de los dos inmediatamente superiores. Con esta regla, y los valores en los bordes, podemos completar el triángulo, tal como hacemos a continuación (hasta $n=7$):







Si, por ejemplo, el lector dirige su mirada al piso $n=6$ y diagonal $k=2$, encontrará el valor de $C(6,2)$, o bien $\binom{6}{2}$, que es 15. Hoy en día asociamos este triángulo a los nombres de Pascal y/o Tartaglia, pero los coeficientes binómicos eran ya conocidos, en mayor o menor grado, siglos antes. Por ejemplo, por Ibn Ezra[5] y por Levi ben Gerson[6], entre los siglos XII y XIV. Aunque los matemáticos árabes y chinos[7] también manejaban estos números, como se aprecia en la figura[8] de la derecha, del siglo XIII. El triángulo de Tartaglia, casi un icono cabalista, contiene, veladamente, muchas sucesiones de números de interés[9]. Es buen momento para recomendar, de nuevo, la lectura de *El diablo de los números* de Erzensberger.

[4] ¿O si lo tiene, en realidad? Alardee el lector de sus habilidades para el razonamiento escolástico-bizantino y justifique combinatoriamente que $C(0,0)=1$.

[5] Abraham Ben Meir Ibn Ezra (1089-1164), matemático, exégeta y astrólogo. . . ¡español!, nacido en Tudela y muerto en Calahorra, estaba interesado y sabía calcular los coeficientes binómicos con $n=7$. Porque siete *eran* los cuerpos celestes: el Sol, la Luna, Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno. Como buen astrólogo, a Ibn Ezra le preocupaba saber de cuántas formas se puede estar simultáneamente bajo varios de esos signos. El lector podrá encontrar más información sobre este personaje en el artículo *La astrología combinatoria del rabino Ibn Ezra*, de Doron Zeilberger (La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española **1** (1998), no. 3).

[6] Parece que fue el rabino Levi Ben Gerson (1288-1344) el primero en dar una expresión explícita de los coeficientes binómicos.

[7] Véase la referencia a Al-Karaji de la página 40. Aprovechamos aquí para sugerir al lector una excelente referencia en Historia de las Matemáticas: *Mathematics and its history* (Springer-Verlag, 1991), de J. Stillwell.

[8] La tabla acaba en $n=8$. Observe el lector los símbolos. ¿Sería capaz de escribir los números del 1 al 99 en estos caracteres chinos?

[9] Por ejemplo, los números triangulares $T_n=\binom{n+1}{2}$ (véase el ejercicio 1.2.3), que están en la diagonal $k=2$. Véase también la subsección 6.3.5.

La regla de recurrencia anterior permite escribir $\binom{n}{k}$ (cuyo índice superior es n) en términos de la suma de dos coeficientes binómicos cuyos índices superiores son $n-1$. Si repetimos el procedimiento, pero para los dos nuevos coeficientes binómicos, llegamos a

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \left[\binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k-1}\right] + \left[\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2}\right] \\ &= \binom{n-2}{k} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} = \binom{2}{0}\binom{n-2}{k} + \binom{2}{1}\binom{n-2}{k-1} + \binom{2}{2}\binom{n-2}{k-2}.\end{aligned}$$

Ahora $\binom{n}{k}$ se escribe como suma de coeficientes binómicos de índice superior $n-2$. Nótese que los números que los acompañan pueden ser escritos, a su vez, como coeficientes binómicos.

Podríamos iterar el proceso, pero los cálculos serían demasiado engorrosos, y vale la pena argumentar en general, combinatoriamente. Queremos escribir $\binom{n}{k}$ en términos de coeficientes binómicos cuyo índice superior sea, por ejemplo, $n-l$. Primero declaramos del “primer tipo” a l elementos de entre $\{1,\dots,n\}$, por ejemplo los l primeros, marcando los restantes $n-l$ como del “segundo tipo”. Ahora clasificamos los k-subconjuntos dependiendo del número j (con $0 \le j \le k$) de elementos del primer tipo que contengan, en la siguiente partición:

$$\left\{\begin{array}{c}k\text{-subconjuntos extraídos}\\ \text{de } \{1,\dots,n\}\end{array}\right\} = \bigcup_{j=0}^{k} \left\{\begin{array}{c}k\text{-subconjuntos extraídos de } \{1,\dots,n\}\\ \text{con } j \text{ elementos del primer tipo}\end{array}\right\}.$$

Obsérvese que, como sólo hay l elementos del primer tipo, los conjuntos de la colección de la derecha que corresponden a valores $j > l$ son vacíos.

Calculamos el tamaño del conjunto con etiqueta j seleccionando primero qué j elementos del primer tipo están en nuestro subconjunto (hay $\binom{l}{j}$ posibilidades); y luego seleccionando los $k-j$ elementos del segundo tipo que contiene el subconjunto (hay $\binom{n-l}{k-j}$ posibilidades). Aplicando las reglas de la suma y del producto llegamos a la **fórmula de Vandermonde**[10]:

$$\boxed{\binom{n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{l}{j}\binom{n-l}{k-j}}$$

El caso $l=1$ es la fórmula de recursión habitual. La suma anterior se extiende, en realidad, hasta el mínimo de l y k. Esta imprecisión en los límites de sumación no supone problema alguno si seguimos aplicando el convenio (que será de uso general en lo que sigue) de que los coeficientes binómicos son nulos si, por ejemplo, el índice de abajo es mayor que el de arriba, o si aparecen índices negativos. En muchas ocasiones aprovecharemos este convenio para ser voluntariamente poco cuidadosos con los límites de sumación. Por ejemplo, en la fórmula anterior de Vandermonde podríamos haber escrito que la suma se extiende hasta ∞.

[10]El nombre del matemático y músico francés Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796) ha quedado asociado al *determinante de Vandermonde*, que exhibimos a la derecha, y cuyo valor es $\prod_{1\le i<j\le n}(a_j - a_i)$. Véase, por ejemplo, cómo aparece este determinante en la demostración del teorema 4.36. Aunque parece ser que, pese a que Vandermonde fue uno de los pioneros de la teoría de los determinantes, jamás consideró el que lleva su nombre.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

D. Cálculo y tamaño de los coeficientes binómicos

Como ya hemos visto, los coeficientes binómicos siguen la siguiente fórmula:

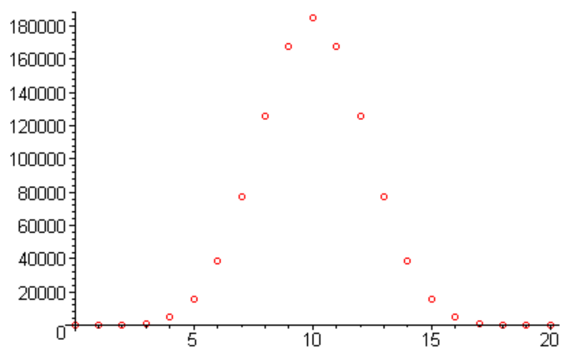
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$$

(nótese que hay tantos factores en el numerador como en el denominador). Una fórmula que, en principio, parece ser la mejor manera de calcularlos. Ahora bien, si el lector recuerda la discusión de las subsecciones 2.4.3 y 2.4.4, convendrá con nosotros en que $n!$ es un número asombrosamente grande. Si, por ejemplo, quisiéramos calcular un modesto $\binom{50}{30}$ con la fórmula anterior, necesitaríamos evaluar los factoriales de 50, 30 y 20, para luego dividirlos. Una tarea que puede poner en apuros a cualquier ordenador. Sin embargo, la aplicación reiterada de la regla de recurrencia permite calcularlos de una manera quizás más eficiente, pues sólo requiere un cierto número de sumas. Por esta razón, muchos paquetes matemáticos de cálculo emplean este segundo procedimiento para evaluar los coeficientes binómicos.

Aún así, la fórmula contiene mucha información. Con ella, y con la ayuda de la fórmula de Stirling, podemos estimar el orden de magnitud de un coeficiente binómico cualquiera. Fijemos un valor de n, un piso en el triángulo de Tartaglia, y miremos los coeficientes binómicos cuyo índice superior es n. Por ejemplo, los correspondientes a $n = 7$ son $1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1$.

Como ya sabemos, por la propiedad A de esta misma subsección, la lista es simétrica con respecto al elemento central (o centrales, si, como en el ejemplo, n es impar). Nótese que los valores van creciendo, de izquierda a derecha, hasta llegar al centro (o centros), a partir del cual empiezan a decrecer. Este comportamiento es general:

$$\max_{k=0,\dots,n} \left\{ \binom{n}{k} \right\} = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil}$$



Obsérvese que los dos coeficientes binómicos escritos a la derecha son el mismo si n es par. Vea el lector el ejercicio 3.1.2 para una posible demostración. A la derecha mostramos la gráfica con los valores de los sucesivos coeficientes binómicos para $n = 20$.

Interesa conocer el orden de magnitud del coeficiente binómico que ocupa la posición central (o centrales) de una fila del triángulo de Pascal-Tartaglia, que como hemos visto antes, es el mayor de toda la fila. Por comodidad de cálculo, analizaremos el coeficiente $\binom{2n}{n}$.

Para empezar, la suma de todos los coeficientes $\binom{2n}{j}$ vale $2^{2n} = 4^n$, así que cada uno de ellos, y en particular $\binom{2n}{n}$, ha de ser menor que 4^n. Pero además, como $\binom{2n}{n}$ es el mayor de todos ellos,

$$4^n = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} < \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{n} = (2n+1)\binom{2n}{n}.$$

Reuniendo ambas estimaciones, concluimos que

$$\frac{4^n}{2n+1} < \binom{2n}{n} < 4^n\,.$$

La precisa estimación asintótica de Stirling (véase la sección 2.4.4) nos permite afinar más:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} \sim \frac{(2n)^{2n}\,e^{-2n}\,\sqrt{4\,\pi\,n}}{[n^n\,e^{-n}\,\sqrt{2\,\pi\,n}]^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi\,n}}\,4^n \qquad \text{cuando } n \to \infty.$$

Así que es un crecimiento exponencial, con una pequeña corrección (el denominador $\sqrt{\pi n}$). Visto en una escala logarítmica, que es la adecuada en este caso, estas correcciones son irrelevantes, y el lector podrá comprobar sin esfuerzo que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\binom{2n}{n}}{n\,\ln(4)} = 1\,.$$

3.1.2. Sobre el teorema del binomio

Tras tanto mentar a los coeficientes binómicos, resulta oportuno recordar el origen de su nombre. La regla del **binomio de Newton** nos permite calcular la potencia n-ésima de una suma de dos términos. La formulación habitual es la siguiente:

$$\boxed{(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k}$$

una expresión que es válida para cualquier número real x. Un ejercicio interesante, que proponemos al lector como ejercicio 3.1.19, consiste en probar la validez del teorema por inducción en n.

$$n \text{ factores} \left\{ \begin{array}{l} (1+x) \\ (1+x) \\ (1+x) \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ (1+x) \\ (1+x) \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} \text{hay que escoger} \\ k \text{ veces la } x \end{array}$$

¡Atención!, nuestra definición del coeficiente binómico $\binom{n}{k}$ era puramente combinatoria: número de maneras de escoger k elementos de entre un conjunto de n elementos. Y aquí reaparecen, de repente, como coeficientes del polinomio que se obtiene al desarrollar $(1+x)^n$. Pero en realidad es justamente la definición combinatoria la que lo justifica. Véase el esquema de la derecha, en el que hemos escrito los n factores en columna. Nos preguntamos cuántas veces aparecerá el término x^k al multiplicarlos todos, pues ése será el coeficiente de x^k. Pero para que aparezca x^k habrá que tomar k veces la x (y $n-k$ veces el 1, claro). Es decir, hay que elegir las k filas en las que tomamos la x. Lo que se puede hacer de $\binom{n}{k}$ maneras.

Por cierto que éste es un primer ejemplo de una **función generatriz**: la función $(1+x)^n$ "genera", al ser desarrollada en potencias de x, la sucesión de números

$$\left(\binom{n}{k}\right)_{k=0}^{\infty} = \left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}, 0, 0, 0\dots\right);$$

sobre estas cuestiones insistiremos, y mucho, en el capítulo 12.

Si reemplazamos x por x/y en la fórmula del binomio,

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{y^k} \quad\Longrightarrow\quad \left(\frac{y+x}{y}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{-k}\,,$$

obtenemos, tras multiplicar por y^n, la siguiente generalización:

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}}$$

que en principio, por el argumento utilizado, sería válida sólo para $y \neq 0$. Pero como para $y = 0$ dice simplemente que $x^n = x^n$, concluimos que es válida para todo y.

Es inmediato obtener, a partir del teorema del binomio, unas cuantas identidades interesantes. Por ejemplo, si en la última expresión tomamos $x = y = 1$, recuperamos la ya conocida

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Pero si tomamos $x = 1$ e $y = -1$, llegamos a la (algo más inesperada[11]) identidad siguiente:

$$\boxed{0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}}$$

que nos dice que la suma de todos los coeficientes binómicos de índice superior n, alternados en signo, es 0. Usaremos esto, por ejemplo, en la demostración del principio de inclusión/exclusión (véase la subsección 3.1.4).

Nuestro siguiente objetivo es evaluar la suma

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}.$$

El truco, que utilizaremos profusamente en el capítulo 12, consiste en derivar con respecto a x la fórmula del binomio. Así se obtiene que

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1}\,; \quad \text{y, evaluando en } x=1, \text{ que} \quad \boxed{\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n\, 2^{n-1}}$$

Usaremos esta argucia muchas veces en el capítulo 12, y muy en particular, en el contexto probabilístico para calcular medias de variables aleatorias que toman valores en los enteros no negativos (véase la sección 13.1). Pero como eso queda todavía lejos, adelantamos un ejemplo combinatorio.

[11] Note el lector que, si n fuera impar, la identidad sería consecuencia de la simetría los coeficientes binómicos, que se irían cancelando por parejas. En el caso de n par ya no es así, pues hay un número impar de sumandos.

EJEMPLO 3.1.2 *Queremos corroborar la intuición que nos dice que el "tamaño medio" de los subconjuntos que se pueden extraer del conjunto* $\{1,\dots,n\}$ *es* $n/2$.

Llamemos Γ a la colección de todos los subconjuntos de $\{1,\dots,n\}$. Sabemos que $|\Gamma| = 2^n$. El tamaño medio al que nos referimos es la media aritmética de los tamaños de todos los subconjuntos, es decir,

$$\frac{1}{2^n}\sum_{\gamma\in\Gamma}|\gamma|\,,$$

donde $|\gamma|$ significa el tamaño de cada subconjunto γ. La suma consta de 2^n sumandos. Vamos a calcularla agrupando los subconjuntos γ que tengan el mismo tamaño, que será un cierto parámetro k entre 0 y n. El cálculo, pese a la aparatosa notación, es sencillo y directo:

$$\frac{1}{2^n}\sum_{\gamma\in\Gamma}|\gamma| = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma\\|\gamma|=k}}|\gamma| = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma\\|\gamma|=k}}k = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}k\,\#\left\{\begin{array}{c}\text{subconjuntos } \gamma\in\Gamma\\ \text{tales que } |\gamma|=k\end{array}\right\}$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} = \frac{1}{2^n}\left(n\,2^{n-1}\right) = \frac{n}{2}\,,$$

como nos sugería la intuición (véase un argumento alternativo en el ejercicio 3.1.10). ♣

El binomio de Newton (versión general)

FIGURA 3.2: Newton

Reescribamos el teorema del binomio, que es válido para cualquier $n\in\mathbb{N}$ (además de para todo $x\in\mathbb{R}$), de la siguiente manera:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\,x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\,x^k.$$

Nótese que el numerador del coeficiente de x^k tiene k factores. Hemos escrito que la suma se extiende hasta ∞, aunque en realidad sabemos que es un polinomio (los coeficientes se anulan si $k>n$). El teorema general del binomio de Newton[12] afirma que la expresión anterior es también cierta sustituyendo n por un α real cualquiera:

Teorema 3.1 (binomio de Newton) *Para todo* $\alpha\in\mathbb{R}$, *si* $|x|<1$,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\,x^k.$$

[12]Sir Isaac Newton (1642-1727) es, quizás, el científico más famoso de todos los tiempos (solo Einstein rivaliza con él en fama y gloria): el padre de la ley de la gravitación y el inventor del Cálculo diferencial e integral (al tiempo que Leibniz). En sus *Philophiae naturalis principia mathematica*, o simplemente *Principia*, de 1687, que son considerados como el más importante libro científico jamás escrito, estableció los principios básicos de la Mecánica, la Dinámica de Fluidos, el movimiento ondulatorio, dedujo las leyes de Kepler del movimiento de planetas y cometas. . . En un arranque de humildad (lo que por cierto no era muy frecuente en él), Newton dijo una vez que si él "había visto un poco más lejos era porque estaba subido a hombros de gigantes", en reconocimiento al trabajo anterior de otros científicos. Pues oiga, no: para gigante, Newton.

¡Cuidado!, la expresión es la misma, pero mientras que en el caso en el que α sea un entero positivo la suma es finita (un polinomio), en el caso general tendremos una serie de potencias infinita. Por esto hemos sido cuidadosos de incluir, en el enunciado del teorema, los valores de x para los que la serie converge con seguridad. El lector podrá encontrar la demostración de este resultado, junto con diversas aplicaciones, en la subsección 12.3.4.

El multinomio de Newton

Vamos ahora a escribir el binomio de Newton de una manera alternativa:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{a,b\geq 0,\, a+b=n} \frac{n!}{a!\, b!}\, x^a y^b\,,$$

que sale de observar, en la primera suma, que, para cada k, los exponentes de x e y suman siempre n. A la vista de esta expresión, quizás el lector podría aventurar que la **fórmula del trinomio** debería ser

$$(x+y+z)^n = \sum_{a,b,c\geq 0,\, a+b+c=n} \frac{n!}{a!\, b!\, c!}\, x^a y^b z^c = \sum_{a,b,c\geq 0} \binom{n}{a,\ b,\ c} x^a y^b z^c\,.$$

A la derecha hemos utilizado una nueva notación,

$$\binom{n}{a,\ b,\ c} = \begin{cases} \frac{n!}{a!\, b!\, c!} & \text{si } a+b+c=n; \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

que permite escribir la suma triple de manera más sencilla: se suman en todos los $a, b, c \geq 0$, pero los términos son nulos a menos que $a+b+c=n$. A este número se le conoce, por razones obvias, como un **coeficientes multinómico**. El caso general del multinomio de Newton sería

$$\boxed{(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n = \sum_{a_1,\dots,a_k\,\geq 0} \binom{n}{a_1,\ a_2,\dots,\ a_k} {x_1}^{a_1} {x_2}^{a_2} \cdots {x_k}^{a_k}}\,,$$

donde, de nuevo,

$$\binom{n}{a_1,\ a_2,\dots,a_k} = \begin{cases} \frac{n!}{a_1\, a_2! \cdots a_k!} & \text{si } a_1+a_2+\cdots+a_k=n; \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Las expresiones anteriores son correctas: el lector puede animarse a probar la última expresión general por inducción en k, partiendo de la fórmula del binomio habitual, que es el caso $k=2$ (véase el ejercicio 3.1.19).

Pero quizás el lector proteste por la súbita irrupción de estos números, que han aparecido como caídos del cielo. Tenga paciencia, pues de la misma manera en que los coeficientes binómicos $\binom{n}{k}$ aparecían en el desarrollo del binomio por razones combinatorias, también estos coeficientes multinómicos tienen su razón de ser combinatoria. En la subsección 3.1.6 volveremos a ellos.

3.1.3. Algunas aplicaciones combinatorias de los coeficientes binómicos

Desde hace unas páginas, los coeficientes binómicos se pasean, pavoneándose. Es hora ya de ponerlos a trabajar. En esta subsección y en las dos siguientes vamos a analizar unas cuantas cuestiones combinatorias en cuya respuesta intervienen, de una manera u otra, los coeficientes binómicos.

Las primeras aplicaciones tienen que ver con contar el **número de soluciones de la ecuación diofántica**

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n.$$

Aquí, los datos son n y k. Y utilizamos el adjetivo *diofánticas*[13] porque las soluciones de la ecuación anterior han de ser números enteros no negativos. Es decir, una solución es una lista $(x_1, \ldots, x_n)$ de números enteros no negativos. En las aplicaciones habituales, además, los x_j suelen tener condiciones adicionales, como ser todos mayores o iguales que 1 o similares.

El enunciado anterior es pura abstracción que recoge los ingredientes fundamentales de diversos problemas combinatorios, algunos de los cuales pasamos a enunciar.

Cuestión 1. Composiciones del entero n de longitud k.

Como vimos en la subsección 2.2.3, una composición de n es una manera de escribir n como suma (ordenada) de números naturales. La composición tendrá longitud k si hay exactamente k sumandos. Así que, si llamamos $x_1, \ldots, x_k$ a estos sumandos, contar el número de estas composiciones es lo mismo que calcular el número de soluciones de

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \\ x_1 \geq 1, \ldots, x_k \geq 1 \end{array} \right\}$$

Cuestión 2. Distribuciones de n bolas *idénticas* en k cajas *numeradas.*

Es la primera vez que aparece en este texto el lenguaje de las distribuciones de bolas en cajas, que, como iremos viendo, es extremadamente útil para representar múltiples cuestiones. Como comprobará el lector, en unos casos las bolas serán idénticas (indistinguibles), y en otros numeradas (distinguibles). Lo mismo ocurrirá con las cajas. De nuevo, todo esto es una abstracción que describe una gran variedad de problemas combinatorios. En la sección 3.4 resumiremos los distintos casos que nos iremos encontrando a lo largo de estas páginas.

En el que nos ocupa, como las bolas son idénticas, lo único relevante es decidir *cuántas* bolas van en cada caja. Así que, si llamamos x_j al número de bolas que va en cada caja j, contar el número de distribuciones (biyección al canto) es lo mismo que contar el número de soluciones de

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \\ x_1 \geq 0, \ldots, x_k \geq 0 \end{array} \right\} \qquad \text{o quizás de} \qquad \left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \\ x_1 \geq 1, \ldots, x_k \geq 1 \end{array} \right\}$$

si es que permitimos cajas vacías (primer caso), o si no permitimos que queden cajas vacías (segundo caso). Por supuesto, el lector puede imaginar otras restricciones sobre las distribuciones de bolas que se traducen, de manera inmediata, en condiciones sobre los x_j.

[13] Estudiaremos este tipo de ecuaciones con detalle en el capítulo 4, en especial en la subsección 4.1.4. Por ahora no nos interesará cómo resolverlas, sino sólo saber cuántas soluciones distintas tienen.

Cuestión 3. Multiconjuntos de tamaño k extraídos de $\{1,\dots,n\}$.

Claro, ¡no podían faltar!, se dirá el lector: si en las listas distinguíamos entre aquellas en las que se permite repetición de las que no, ¿por qué no hacer lo mismo con los conjuntos? En un subconjunto, de manera natural, la repetición de símbolos está prohibida. Y aunque suene algo forzado, definiremos un **multiconjunto** de tamaño k extraído de $\{1,\dots,n\}$ como una colección de k símbolos escogidos de $\{1,\dots,n\}$ donde se permite que aparezca varias veces cada símbolo.

Antes de caer en el desánimo por la vertiginosa proliferación de problemas con y sin repetición, con y sin orden, con y sin... observe el lector (o medite un rato hasta convencerse) que, para describir un multiconjunto, lo único relevante es decidir *cuántas* veces aparece cada símbolo. Es decir, podemos representar un multiconjunto general de la siguiente manera:

$$\{1,\overset{x_1\,\text{veces}}{\ldots},1,2,\overset{x_2\,\text{veces}}{\ldots},2,\dots,n,\overset{x_n\,\text{veces}}{\ldots},n\}\,,\quad\longleftrightarrow\quad\{1_{x_1},2_{x_2},\dots,n_{x_n}\}\,.$$

Los x_j son enteros no negativos, y su suma ha de valer k (que es el tamaño total del multiconjunto). Así que el número de multiconjuntos coincide con el número de soluciones de

$$\#\text{ soluciones de}\left\{\begin{array}{c} x_1+x_2+\cdots+x_n=k \\ x_1\geq 0\,,\dots\,,x_n\geq 0\end{array}\right\}$$

El mismo tipo de problema, salvo que los papeles de n y k están cambiados con respecto a los anteriores.

Una vez convencidos de que vale la pena dar solución a la cuestión sobre soluciones de ecuaciones diofánticas, pues de esa manera daríamos solución, de una tacada, a estas tres cuestiones, nos ponemos con ello.

Pero empezamos el análisis recurriendo al lenguaje de las composiciones. Revise el lector el argumento que utilizamos en la subsección 2.2.3, y que entonces nos permitió deducir que el número total de composiciones de n era 2^{n-1}: una composición se obtiene colocando los n unos en fila y decidiendo, en cada hueco entre ellos (hay $n-1$) si se para (y se suma todo lo que se haya ido acumulando) o se sigue adelante. Es decir, es lo mismo que una lista de longitud $n-1$ formada con dos símbolos. Si ahora la composición ha de tener k sumandos, querrá decir que en la lista anterior ha de aparecer exactamente $k-1$ veces el separador que representa el "para y suma" (¿por qué $k-1$?). De manera que nos basta con escoger en qué $k-1$ huecos (de los $n-1$ posibles) van estos separadores. Las biyecciones implícitas en este argumento nos permiten deducir que

$$\begin{aligned}\#\left\{\begin{array}{c}\text{composiciones de lon-}\\ \text{gitud } k \text{ del número } n\end{array}\right\} &= \#\left\{\begin{array}{c}\text{formas de elegir } k-1 \text{ posiciones (para los separadores)}\\ \text{de entre } n-1 \text{ (los huecos a nuestra disposición)}\end{array}\right\}\\ &= \#\left\{\begin{array}{c}\text{subconjuntos distintos de tamaño } k-1\\ \text{extraídos del conjunto } \{1,\dots,n-1\}\end{array}\right\}=\binom{n-1}{k-1}.\end{aligned}$$

Y de forma inmediata, vista la traducción a ecuaciones diofánticas, que

$$\boxed{\#\text{ soluciones de}\left\{\begin{array}{c} x_1+x_2+\cdots+x_k=n \\ x_1\geq 1,\dots,x_k\geq 1\end{array}\right\}=\binom{n-1}{k-1}}$$

Sigamos adelante: en las cuestiones combinatorias descritas al principio aparecía también el problema de contar el número de soluciones de

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 + \cdots + x_k = n \\ x_i \geq 0 \end{array} \right\}.$$

Por ejemplo, al contar las distribuciones de n bolas idénticas en k cajas numeradas, si es que permitimos cajas vacías.

Vamos a transformar este problema en uno del tipo anterior (con restricciones sobre las variables del tipo ≥ 1) con una sencilla biyección. A cada lista $(x_1, \ldots, x_k)$ solución del problema anterior le asociaremos una lista $(y_1, \ldots, y_k)$ con la receta de que cada y_j es el correspondiente x_j más 1. Como cada $y_j = x_j + 1$, es claro que son números ≥ 1. Pero ahora su suma vale lo que valía la suma de los x_j más el número de unos añadidos, es decir, $n + k$. Esta biyección nos permite concluir que

$$\boxed{\#\text{ sols. de} \left\{ \begin{array}{c} x_1 + \cdots + x_k = n \\ x_i \geq 0 \end{array} \right\}} = \#\text{ sols. de} \left\{ \begin{array}{c} y_1 + \cdots + y_k = n + k \\ y_i \geq 1 \end{array} \right\} = \boxed{\binom{n+k-1}{k-1}}$$

Quizás el lector quiera reescribir este argumento en términos de cajas en bolas (quitando una bola de cada caja si es que todas tienen al menos una; o, en sentido contrario, añadiendo una bola a cada caja en una distribución general para obtener una con cajas no vacías). Por cierto que el número de k-multiconjuntos con símbolos $\{1, \ldots, n\}$ de la cuestión 3 resulta ser, leyendo adecuadamente la fórmula anterior, $\binom{n+k-1}{n-1}$.

Visto el éxito conseguido, nos animamos a plantear una versión más general del problema diofántico, como es calcular el número de soluciones de

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \\ x_1 \geq p_1, \ldots, x_k \geq p_k \end{array} \right\}.$$

Los datos aquí son n, k y unos enteros no negativos $p_1, \ldots, p_k$. Resolvemos la cuestión con un truco como el de arriba, transformándola en una que ya sabemos contar, como por ejemplo aquella en el que las restricciones son del tipo ≥ 0. Para ello, empleamos el cambio (biyección) siguiente:

$$y_j = x_j - p_j \qquad \text{para cada } j = 1, \ldots, k.$$

Nótese que los y_j son enteros mayores o iguales que 0 (pues los $x_j \geq p_j$) que suman

$$\sum_{j=1}^{k} y_j = \sum_{j=1}^{k} (x_j - p_j) = \sum_{j=1}^{k} x_j - \sum_{j=1}^{k} p_j = n - \sum_{j=1}^{k} p_j\,.$$

ahora, simplemente mirando la fórmula de arriba, concluimos que:

$$\begin{aligned} \boxed{\#\text{ sols de} \left\{ \begin{array}{c} x_1 + \cdots + x_k = n \\ x_1 \geq p_1, \ldots, x_k \geq p_k \end{array} \right\}} &= \#\text{ sols de} \left\{ \begin{array}{c} y_1 + \cdots + y_k = n - \sum_{j=1}^{k} p_j \\ y_1 \geq 0, \ldots, y_k \geq 0 \end{array} \right\} \\ &= \boxed{\binom{n + k - 1 - \sum_{j=1}^{k} p_j}{k-1}} \end{aligned}$$

De nuevo animamos al lector a que reinterprete este argumento en términos de quitar o añadir bolas en cajas. Observe el lector que si $\sum_j p_j > n$ no hay soluciones, pero de esto ya da cuenta el convenio habitual de los coeficientes binómicos. Para recordar esta aparatosa fórmula, puede ser útil, casi como regla mnemotécnica, que el coeficiente binómico tiene

- como índice superior el valor total de la suma, n, más el número de sumandos, k, menos 1 y menos lo que sumen las restricciones (los p_j);
- y como índice inferior, el número de sumandos menos 1.

La fórmula anterior contiene, como casos particulares, los dos resultados obtenidos antes:

$$\text{si } p_1 = p_2 = \cdots p_k = 0, \text{ entonces la respuesta es } \binom{n+k-1}{k-1};$$

$$\text{y si } p_1 = p_2 = \cdots = p_k = 1, \text{ entonces es simplemente } \binom{n-1}{k-1}.$$

El lector ambicioso estará ya esperando la siguiente generalización: dadas dos listas de enteros no negativos $(p_1, \ldots, p_k)$ y $(q_1, \ldots, q_k)$, contar el número de soluciones de

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \\ p_1 \le x_1 \le q_1, \ldots p_k \le x_k \le q_k \end{array} \right\}.$$

Ahora hay restricciones sobre los x_j por arriba y por debajo. En términos de distribuciones de bolas en cajas, se trataría de calcular el número de formas de distribuir n bolas idénticas en k cajas numeradas de manera que en la caja 1 vayan entre p_1 y q_1 bolas; en la caja 2 entre p_2 y q_2 bolas, etc. Pero a pesar de que el problema tiene un aspecto semejante a los anteriores, aquí no es posible obtener una fórmula sencilla en términos de los parámetros involucrados, pues la solución pasa por aplicar el siempre engorroso principio de inclusión/exclusión. Lo ilustramos a continuación con un ejemplo.

Pero antes, avisamos al lector de que se podrían plantear restricciones más generales que éstas: por ejemplo, exigir que x_1 fuera par, que x_2 estuviera entre 3 y 15, que x_3 fuera múltiplo de 5, etc. En la sección 14.1 volveremos sobre esto, ya con el lenguaje de las funciones generatrices.

Ejemplo 3.1.3 *El número de soluciones de la ecuación diofántica* $x_1+x_2+x_3 = 50$, *donde* $0 \le x_1 \le 10$, $5 \le x_2 \le 35$ *y* $0 \le x_3 \le 20$.

Iniciamos el análisis, para facilitar los cálculos, poniendo las cotas inferiores a cero:

$$y_1 = x_1 \ge 0\,, \quad y_2 = x_2 - 5 \ge 0\,, \quad y_3 = x_3 \ge 0\,.$$

Con esta transformación, el problema pasa a ser el de contar el número de soluciones de

$$\left\{ \begin{array}{c} y_1 + y_2 + y_3 = 50 - 0 - 5 - 0 = 45 \\ 0 \le y_1 \le 10\,,\ 0 \le y_2 \le 30\,,\ 0 \le y_3 \le 20 \end{array} \right\}.$$

Ahora pasaremos al complementario y aplicaremos el principio de inclusión/exclusión. Definimos primero el conjunto "grande":

$$\mathcal{X} = \left\{ \text{soluciones de } \left\{ \begin{array}{c} y_1 + y_2 + y_3 = 45 \\ y_i \ge 0 \end{array} \right\} \right\} \Longrightarrow |\mathcal{X}| = \binom{45+3-1}{3-1} = \binom{47}{2}.$$

Hay tres prohibiciones:

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{c} \text{soluciones} \\ \text{de} \end{array} \left\{ \begin{array}{c} y_1 + y_2 + y_3 = 45 \\ y_1 \geq 11\,, y_2 \geq 0\,, y_3 \geq 0 \end{array} \right\} \right\} \Rightarrow |\mathcal{A}| = \binom{45+3-11-1}{3-1} = \binom{36}{2},$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{array}{c} \text{soluciones} \\ \text{de} \end{array} \left\{ \begin{array}{c} y_1 + y_2 + y_3 = 45 \\ y_1 \geq 0\,, y_2 \geq 31\,, y_3 \geq 0 \end{array} \right\} \right\} \Rightarrow |\mathcal{B}| = \binom{45+3-31-1}{3-1} = \binom{16}{2},$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{array}{c} \text{soluciones} \\ \text{de} \end{array} \left\{ \begin{array}{c} y_1 + y_2 + y_3 = 45 \\ y_1 \geq 0\,, y_2 \geq 0\,, y_3 \geq 21 \end{array} \right\} \right\} \Rightarrow |\mathcal{C}| = \binom{45+3-21-1}{3-1} = \binom{26}{2}.$$

El número de soluciones válidas será $|\mathcal{X}| - |\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}|$, así que tendremos que calcular el tamaño de las intersecciones de dos y tres conjuntos. Por ejemplo,

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \left\{ \begin{array}{c} \text{soluciones} \\ \text{de} \end{array} \left\{ \begin{array}{c} y_1 + y_2 + y_3 = 45 \\ y_1 \geq 11\,, y_2 \geq 31\,, y_3 \geq 0 \end{array} \right\} \right\} \Rightarrow |\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| = \binom{45+3-42-1}{3-1} = \binom{5}{2}.$$

De la misma manera se obtendría que $|\mathcal{A} \cap \mathcal{C}| = \binom{15}{2}$. Pero al calcular $|\mathcal{B} \cap \mathcal{C}|$ obtendríamos un coeficiente binómico con índice superior negativo. Es decir, $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$. En consecuencia, la intersección tres a tres será también vacía y el resultado final sería

$$\#\,\text{soluciones} = \binom{47}{2} - \left[\binom{36}{2} + \binom{16}{2} + \binom{26}{2}\right] + \left[\binom{5}{2} + \binom{15}{2}\right] = 121.$$

♣

3.1.4. Los coeficientes binómicos y el principio de inclusión y exclusión

El principio de inclusión/exclusión, que presentamos en la sección 2.3, permite calcular el tamaño de la unión de una colección finita de conjuntos $\{A_1, A_2 \ldots, A_n\}$:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \alpha_j,$$

donde los α_j son las sumas de los tamaños de todas las posibles intersecciones de j conjuntos:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| \\ \alpha_2 & = & |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-1} \cap A_n| \\ & \vdots & \\ \alpha_n & = & |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|. \end{array}$$

Ahora sabemos cuántos sumandos aparecen en el cálculo de cada α_j. Por ejemplo, α_1 consta de n sumandos (las posibles formas de escoger 1 elemento de un conjunto de n, esto es, $\binom{n}{1}$); α_2 consta de $\binom{n}{2}$ sumandos (las posibles formas de escoger 2 elementos de entre n), etc. En general, α_j tendrá $\binom{n}{j}$ términos. Conocer este dato será muy útil porque, como veremos más adelante (véanse los ejemplos 3.1.4 y 3.1.5), muchas veces *todas* las intersecciones de j conjuntos, para cada valor de j, son del mismo tamaño; y esta simetría nos permitirá obtener fórmulas más o menos sencillas.

A. Demostración del principio de inclusión/exclusión

Vamos a utilizar un argumento de doble conteo. Llamamos $A = \cup_{j=1}^{n} A_j$ y denotamos los elementos de A por $\omega_1, \omega_2, \dots$

Construimos una tabla en cuyas columnas situamos los elementos ω_j de A. Etiquetando las filas aparecen primero los conjuntos $A_1, \dots, A_n$, luego las intersecciones dos a dos, $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap A_3$, $\dots A_{n-1} \cap A_n$; después, las intersecciones tres a tres, cuatro a cuatro... así, hasta llegar a la intersección de todos los A_j.

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	$\cdots$
A_1	1	1	1	1	$\cdots$
A_2	1	1	1	0	$\cdots$
A_3	1	1	0	1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
A_n	1	0	0	1	$\cdots$
$A_1 \cap A_2$	-1	0	-1	0	$\cdots$
$A_1 \cap A_3$	-1	-1	0	-1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$A_{n-1} \cap A_n$	-1	0	0	-1	$\cdots$
$A_1 \cap A_2 \cap A_3$	1	1	0	0	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n$	1	0	0	1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$A_1 \cap \cdots \cap A_n$	$(-1)^{n+1}$	0	0	0	$\cdots$

Los registros de la matriz van a ser 0, 1 y -1. Consideremos la columna etiquetada por un cierto elemento ω_j: si ω_j no pertenece al conjunto que etiquete la fila, pondremos un 0. En el caso de pertenencia al conjunto, distinguiremos si se trata de una intersección de un número *impar* de conjuntos (en cuyo caso pondremos un $+1$) o de una intersección de un número *par* (escribiremos un -1). Por ejemplo, pondríamos un 1 en las casillas correspondientes si ω_j estuviera en A_3, en $A_2 \cap A_5 \cap A_6$, o en $A_2 \cap A_3 \cap A_7 \cap A_8 \cap A_9$, mientras que pondríamos un -1 si perteneciera, por ejemplo, a $A_1 \cap A_3$, a $A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_n$, etc. La tabla tendría un aspecto parecido al que se muestra a la derecha. Ahora sumaremos las entradas de la matriz, primero por filas y luego por columnas.

La suma por filas nos va a dar la suma alternada en signos del principio de inclusión/exclusión (hemos diseñado la matriz expresamente para esto). La fila etiquetada con A_1 contiene $|A_1|$ unos, la de A_2, $|A_2|$ unos, etc. Cada fila etiquetada con $A_i \cap A_j$ contiene $|A_i \cap A_j|$ signos "-1". Y así sucesivamente. En total, la suma por filas nos da

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \cdots .$$

La suma por columnas requiere un análisis más cuidadoso. Fijemos un $\omega \in A$, que estará en, digamos, k de los A_j, para cierto $1 \le k \le n$. En su columna tendremos exactamente k unos en las filas etiquetadas por los conjuntos $A_1, \dots, A_n$. Pero si está en k de los A_j, estará en exactamente $\binom{k}{2}$ de las intersecciones dos a dos: ahí encontraremos $\binom{k}{2}$ signos "-1". También estará en $\binom{k}{3}$ de las tres a tres, etc. El último signo no nulo estará en las filas de las intersecciones k a k: será un $(-1)^{k+1}$, justo en la fila etiquetada por la intersección de todos los A_j en los que esté ω; más allá, todo ceros. En total, la suma de la columna de ω valdrá

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \cdots + (-1)^{k+1}\binom{k}{k} = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1}\binom{k}{j} = 1 - \sum_{j=0}^{k} (-1)^{j}\binom{k}{j}.$$

Pero la suma (completa y alternada en signo) de coeficientes binómicos es 0 (véase la página 117). Así que al sumar las entradas de la columna del elemento ω obtenemos exactamente 1.

Si ahora tomamos un elemento ω distinto, cambiará su valor de k (el número de subconjuntos a los que pertenezca), pero el argumento funciona igualmente. De manera que cada columna de la matriz suma 1. Y como hay $|A| = |A_1 \cup \cdots \cup A_n|$ columnas, resulta que la suma $(*)$ vale $|A|$, lo que concluye la demostración. ■

El lector podrá encontrar un par de generalizaciones del principio del inclusión/exclusión en los ejercicios 3.1.25 y 3.1.26.

B. Las desigualdades de Bonferroni

La fórmula del principio de inclusión/exclusión,

$$\Big|\bigcup_{j=1}^n A_j\Big| = \underbrace{\sum_{i=1}^n |A_i|}_{\alpha_1} - \underbrace{\sum_{1\le i<j\le n} |A_i\cap A_j|}_{\alpha_2} + \underbrace{\sum_{1\le i<j\le n} |A_i\cap A_j|}_{\alpha_3} + \cdots + (-1)^{n+1}\underbrace{|A_1\cap\cdots\cap A_n|}_{\alpha_n}\,.$$

exige calcular los valores de los sucesivos α_j, lo que en general es una tarea muy engorrosa. Nótese que hay una cantidad enorme, $2^n - 1$ sumandos, que calcular.

Nos gustaría saber el error que se cometería si, por ejemplo, nos limitáramos a calcular los primeros α_j. Por ejemplo, el lector podrá comprobar (véase el ejercicio 3.1.21), que

$$|A_1\cup\cdots\cup A_n| \le \sum_{j=1}^n |A_j| = \alpha_1\,.$$

Así que si nos quedamos simplemente con el primer término (las sumas de los tamaños individuales), acotamos la suma completa por arriba. En el mismo ejercicio se pide comprobar que $|A_1\cup\cdots\cup A_n| \le \alpha_1 - \alpha_2$. Bueno, no va mal. Pero, en estas estimaciones, ¿en cuánto nos "equivocamos"? El siguiente resultado responde a esta pregunta:

Lema 3.2 *Para cada $2 \le t \le n$,*

$$\Big|\sum_{j=1}^n (-1)^{j+1}\alpha_j - \sum_{j=1}^{t-1}(-1)^{j+1}\alpha_j\Big| = \Big|\sum_{j=t}^n(-1)^{j+1}\alpha_j\Big| \le \alpha_t\,.$$

Así que el error cometido al truncar la serie de principio de inclusión/exclusión está controlado por el tamaño del primer término despreciado.

¡Bueno!, dirá el lector, no es tan raro: da la impresión de que los números α_j, que son todos no negativos, son cada vez más pequeños. Por ejemplo, es claro que los $|A_j|$ son más grandes que los $|A_i \cap A_j|$. Pero ¡cuidado!, de los primeros sumamos n, mientras que de los segundos sumamos más, $\binom{n}{2}$. El lema anterior sería inmediato si efectivamente se cumpliera que $\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \alpha_3 \ge \cdots$ (véase el ejercicio 3.1.22). Pero éste no es el caso. En general, los términos α_j del principio de inclusión/exclusión *no tienen por qué* ser decrecientes (véase un sencillo ejemplo en el ejercicio 3.1.23). Así que la demostración del lema 3.2 es más sutil de lo que pudiera parecer a primera vista, y requiere una cuidadosa estimación del valor de sumas alternadas (pero incompletas) de coeficientes binómicos. El lector podrá encontrar las sugerencias oportunas para completar esta prueba en el ejercicio 3.1.24.

Del lema anterior obtenemos inmediatamente toda una cadena de desigualdades, las llamadas **desigualdades de Bonferroni**. Partimos de la ya conocida

$$\boxed{|A_1 \cup \cdots \cup A_n| \leq \alpha_1}$$

que nos dice que $|A_1 \cup \cdots \cup A_n| - \alpha_1 \leq 0$. Ahora, el caso $t = 2$ del lema reza así (nótese cómo nos libramos del valor absoluto en el segundo paso):

$$\big||A_1 \cup \cdots \cup A_n| - \alpha_1\big| \leq \alpha_2 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 - |A_1 \cup \cdots \cup A_n| \leq \alpha_2 \quad \Longrightarrow \boxed{|A_1 \cup \cdots \cup A_n| \geq \alpha_1 - \alpha_2},$$

que es la segunda desigualdad de la cadena. Ahora el caso $t = 3$ nos da

$$\begin{aligned} \big||A_1 \cup \cdots \cup A_n| - (\alpha_1 - \alpha_2)\big| \leq \alpha_3 \quad &\Longrightarrow \quad |A_1 \cup \cdots \cup A_n| - \alpha_1 + \alpha_2 \leq \alpha_3 \\ &\Longrightarrow \quad \boxed{|A_1 \cup \cdots \cup A_n| \leq \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3}, \end{aligned}$$

que es la tercera desigualdad. Y así, sucesivamente. Las escribimos en general:

$$\boxed{|A_1 \cup \cdots \cup A_n| \leq \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \alpha_j \quad \text{si } k \text{ impar}; \quad |A_1 \cup \cdots \cup A_n| \geq \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \alpha_j \quad \text{si } k \text{ par}}$$

Cada vez que añadamos un α_j (con su signo), nos acercamos cada vez más al valor real, y estas aproximaciones se van alternando: una por exceso, la siguiente por defecto. Sólo al final, al sumar todos los α_j con sus signos correspondientes, recuperamos el valor exacto de $|A_1 \cup \cdots \cup A_n|$. Recordemos, además, que sabemos acotar el error que se comete en cada una de ellas (el valor de α_{k+1}, el primer término despreciado).

C. Algunas aplicaciones

En los dos siguientes ejemplos recogemos dos aplicaciones especialmente interesantes del principio de inclusión/exclusión: contar el número de aplicaciones sobreyectivas y calcular el número de los llamados “desbarajustes”, un tipo especial de permutaciones.

Ejemplo 3.1.4 *Contemos cuántas* ***aplicaciones sobreyectivas*** *podemos dar entre los conjuntos* $\mathcal{X} = \{1, \ldots, n\}$ *e* $\mathcal{Y} = \{1, \ldots, k\}$.

Recuérdese, del ejemplo 2.2.5, que podemos identificar aplicaciones de $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ con n-listas formadas con los símbolos $\{1, \ldots, k\}$. Las aplicaciones sobreyectivas son las que no se “saltan” ningún elemento de $\mathcal{Y}$. Más formalmente, aquéllas para las que, para todo $y \in \mathcal{Y}$, existe al menos un $x \in \mathcal{X}$ tal que $f(x) = y$. Alternativamente, son las n-listas en las que aparecen todos los k símbolos. En el argumento que sigue iremos alternando estos dos puntos de vista.

Vamos a pasar al complementario: las aplicaciones que no sean sobreyectivas, o bien se saltarán el elemento 1, o bien el 2, etc., así hasta el k. Así que, si definimos los conjuntos

$$A_j = \{\text{aplicaciones } \mathcal{X} \to \mathcal{Y} \text{ que se saltan el elemento } j\}, \qquad \text{para cada } j = 1, \ldots, k\ ,$$

el número de aplicaciones sobreyectivas resulta ser $k^n - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k|$.

Calculemos, en primer lugar, el tamaño de cada uno de los A_j. Una aplicación que esté en A_j no toma el valor j como imagen. Y en términos de listas, eso supone construir n-listas en las que utilicemos cualquiera de los símbolos de $\mathcal{Y}$ menos el símbolo j. Así que

$$|A_j| = (k-1)^n\,, \quad \text{para cada } j = 1, \dots, k.$$

Vamos con las intersecciones 2 a 2: si una aplicación está en $A_i \cap A_j$, entonces no tomará como imagen ni al símbolo i ni al j. Es decir, la lista correspondiente se formará con cualesquiera de los otros $k-2$ símbolos. Por tanto,

$$|A_i \cap A_j| = (k-2)^n\,, \quad \text{para cada } i \neq j.$$

El mismo argumento sirve para las intersecciones tres a tres, cuatro a cuatro, etc. Como el número de sumandos en cada suma de la expresión del principio de inclusión/exclusión viene dado por un coeficiente binómico, concluimos que, si $|\mathcal{X}| = n$ e $|\mathcal{Y}| = k$,

$$\boxed{\#\Big\{\text{aplicaciones sobreyectivas } \mathcal{X} \to \mathcal{Y}\Big\}} = k^n - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k|$$

$$= k^n - \left[\binom{k}{1}(k-1)^n - \binom{k}{2}(k-2)^n + \cdots \pm \binom{k}{k}(k-k)^n\right] = \boxed{\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \binom{k}{j}(k-j)^n}$$

¡Pues vaya formulita!, clamará el lector, y con razón. Y eso que estábamos en uno de los casos "buenos" de aplicación del principio de inclusión/exclusión, en el que todas las intersecciones del mismo tipo tienen el mismo tamaño. Como regla de cálculo, lo reconocemos, no resulta muy útil. Por eso, en la subsección 3.3.1 retomaremos esta cuestión, y obtendremos una manera alternativa de calcular el número de aplicaciones sobreyectivas, apoyándonos en una de las familias de números más famosas de la Combinatoria: los números de Stirling (de segunda especie). El lector impaciente puede ya saltar hasta allí, si lo desea. ♣

Ejemplo 3.1.5 ***Desbarajustes.***

Las permutaciones de $\{1, \dots, n\}$ son, recordemos, las n-listas sin repetición formadas con ese conjunto de símbolos. Es decir, todas las $n!$ posibles reordenaciones de los símbolos $\{1, \dots, n\}$. O, alternativamente, las aplicaciones biyectivas de $\{1, \dots, n\}$ en sí mismo. En la sección 3.2 nos ocuparemos de estos objetos, de su estructura interna y de diversos problemas combinatorios que aparecen al estudiarlos.

Aquí nos vamos a centrar en un tipo muy especial de permutaciones, a las que llamaremos desbarajustes: son las n-listas en las que ningún símbolo está en su posición "natural": es decir, el 1 no está en la posición primera, el 2 no está en la segunda, etc. En el lenguaje de las aplicaciones, serían las biyecciones que no fijan elemento alguno.

Nos interesa hallar una fórmula explícita para el número de desbarajustes, al que nos referiremos como D_n. O mejor, para $D_n/n!$, que representa la proporción que los desbarajustes ocupan entre todas las permutaciones. Esto es, la probabilidad de que si escogemos una permutación al azar, ésta sea un desbarajuste.

En el planteamiento clásico del problema[14], se han escrito n cartas y preparado los n sobres con las direcciones correspondientes, cada uno al lado de su carta. Pero alguien los ha descolocado, de manera que no queda más remedio que introducir las cartas en los sobres al azar. Hecho esto, ¿cuál será la probabilidad de no acertar ninguna? Esta probabilidad, obsérvese, es justamente $D_n/n!$.

Antes de empezar a analizar el problema, quizás el lector debería meditar un momento sobre la cuestión y apelar a su intuición para, al menos, arriesgar una respuesta aproximada: ¿una probabilidad cercana a 0, cercana a 1? ¿Qué ocurre cuando el número de cartas y sobres es muy grande? Parece difícil no acertar alguna, ¿o no?

Argumentamos, como antes, pasando al complementario y usando el principio de inclusión/exclusión. Una permutación no es un desbarajuste si al menos uno de los símbolos está en su posición natural. Así que consideramos los siguientes conjuntos:

$$A_j = \{\text{permutaciones de } \{1,\dots,n\} \text{ con el símbolo } j \text{ en la posición } j,\} \quad \text{para } j = 1,\dots,n$$

(en el lenguaje de las aplicaciones, cada A_j contendría a las biyecciones que fijan el correspondiente elemento j). Como hay $n!$ permutaciones en total,

$$D_n = n! - |A_1 \cup \cdots \cup A_n| \,.$$

El tamaño de cualquiera de los conjuntos A_j es $(n-1)!$, porque en A_j están las listas en las que el símbolo j está en la posición j, y para contarlas bastará ordenar (permutar) los $n-1$ símbolos restantes. Por otro lado, todas las intersecciones dos a dos tienen tamaño $(n-2)!$, pues en una intersección dos a dos están las listas con dos símbolos ya colocados en sus correspondientes posiciones (sólo hay que permutar los restantes). Y así con el resto de los casos. Aplicando el principio de inclusión/exclusión obtenemos que

$$D_n = n! - \left[\binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}(n-n)!\right] = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(n-j)!(-1)^j.$$

Esto es,

$$\boxed{D_n = n!\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}}, \qquad \text{o bien} \qquad \frac{D_n}{n!} = \sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}.$$

La fórmula, como puede comprobar el lector, es bastante más sencilla que la del caso de las aplicaciones sobreyectivas. Pero más aún, la cantidad $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j/j!$, que en principio depende de n, es, a todos los efectos numéricos y si n es grande, casi indistinguible[15] de $1/e$.

¡Atención!, porque la conclusión es sorprendente: por un lado, la probabilidad $D_n/n!$ de obtener un desbarajuste es prácticamente independiente de n (si n es suficientemente grande). Pero más aún, es una probabilidad "grande", mayor que un tercio. Quizás más de lo que hubiéramos apostado al principio.

[14] Una versión alternativa habla de hombres que dejan sus sombreros a la entrada de una fiesta, y luego los recogen al azar, y luego... una versión algo anticuada, en todo caso.

[15] Como ya comentamos en la subsección 2.4.2. Por ejemplo, las primeras cifras decimales de $1/e$ son 0.3678794412, mientras que al sumar hasta $j = 10$ obtenemos 0.3678794643. El lector interesado podrá encontrar un argumento preciso en el ejercicio 3.1.27.

¿Y qué explicación[16] tiene este extraño fenómeno? Llamemos B_j a los complementarios de los A_j en el conjunto de las permutaciones. Es decir, B_j contiene a las permutaciones de $\{1,\dots,n\}$ en las que el símbolo j no está en la posición j. Obsérvese que

$$Prob(B_j) = 1 - Prob(A_j) = 1 - \frac{(n-1)!}{n!} = 1 - \frac{1}{n}\,.$$

La intersección de todos los conjuntos B_j son, precisamente, los desbarajustes. Si los B_j *fueran independientes* entre sí, entonces tendríamos que

$$Prob\Big(\bigcap_{j=1}^{n} B_j\Big) = \prod_{j=1}^{n} Prob(B_j) = \prod_{j=1}^{n}\Big(1-\frac{1}{n}\Big) = \Big(1-\frac{1}{n}\Big)^n \approx \frac{1}{e} \qquad \text{si } n \text{ es grande.}$$

No toca aquí precisar el significado exacto de "independientes", pues de eso nos ocuparemos en el capítulo 7. Pero, de manera intuitiva, quiere decir que, por ejemplo, el que el símbolo j esté fuera de su posición no "influye" en que el símbolo k esté fuera de su posición. ¿Es éste el caso? No, desde luego, si consideramos permutaciones de dos elementos $\{1,2\}$, porque si el 1 está fuera de su posición, entonces el 2 ha de estar necesariamente descolocado. Si tenemos tres símbolos, el que el símbolo 1 no esté en su posición influye en que, por ejemplo, el 2 no esté en la segunda posición, aunque algo "menos". Pero cuando n se hace cada vez más grande, esta influencia se va diluyendo. Es decir, los B_j son (aproximadamente) independientes, lo que explica que la probabilidad de obtener un desbarajuste sea $\approx 1/e$. El lector interesado puede encontrar un argumento riguroso de esta afirmación en el ejercicio 3.1.28.

Como extensión de este análisis sobre desbarajustes, en el ejercicio 3.1.29 se cuenta el número de permutaciones que fijan 1, 2, etc. símbolos. ♣

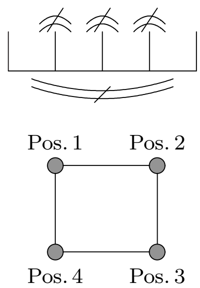
Como ya hemos comentado en alguna ocasión, y como está comprobando repetidamente el lector, un buen número de cuestiones combinatorias tienen que ver con listas con restricciones. Habitualmente, estas restricciones impiden contar el número de listas con una simple aplicación de la regla del producto, y hace falta aplicar otro tipo de técnicas.

Los dos ejemplos anteriores son una buena ilustración. En el de las aplicaciones sobreyectivas, se trata de contar n-listas formadas con los símbolos $\{1,\dots,k\}$ en las que aparecen todos los símbolos posibles. En los desbarajustes, se trata de permutaciones (n-listas sin repetición con los símbolos $\{1,\dots,n\}$) en las que ningún símbolo aparece en su posición natural. En ambos casos, se trata de un buen número (k en el primer caso, n en el segundo) de condiciones simultáneas (intersección de condiciones), que tras pasar al complementario, se convierten en una unión de condiciones (las complementarias de las originales). Ahí es donde entra en escena el principio de inclusión/exclusión.

Otro tipo de restricciones, muy frecuentes, son aquellas en las no se pueden repetir símbolos en ciertas posiciones. Ya nos hemos encontrado con algún caso, como el del ejemplo del ejemplo 2.2.7. Queríamos entonces contar las 4-listas en las que podemos situar los símbolos $\{1,\dots,n\}$, con la restricción de que posiciones consecutivas deben llevar símbolos distintos y, además, no podemos colocar el mismo símbolo en las posiciones primera y cuarta.

[16] La que aquí sugerimos requiere cierta familiaridad con conceptos de probabilidad. Quizás el lector quiera consultar antes el capítulo 7. Véanse, por ejemplo, el ejercicio 7.3.7 y el ejemplo 7.5.12.

A la derecha exhibimos un par de representaciones gráficas del problema: arriba, la lista con sus prohibiciones; abajo, una traducción que utilizaremos más adelante: cada posición de la lista etiqueta un vértice y cada prohibición se corresponde con un arco o arista. Esto es lenguaje de grafos, que desarrollaremos en el capítulo 10. Sólo lo usamos aquí para representar de manera sencilla, sin más aparato teórico. Pero observe el lector cómo el esquema con vértices y arcos "representa" la información de manera más clara que el dibujo de la lista con prohibiciones.



Ya obtuvimos la respuesta al comienzo de la sección 2.3, separando en dos casos y aplicando la regla de la suma: hay $n(n-1)(n^2-3n+3)$ listas distintas. Pero, dado que se trata de unas cuantas restricciones simultáneas, deberíamos ser capaces de abordarlo también usando el principio de inclusión/exclusión (tras pasar al complementario). Sea A el conjunto de las listas de interés y X el conjunto de las 4-listas con los símbolos $\{1,\dots,n\}$, de las que hay n^4. El complementario de A dentro de X se puede escribir como

$$X \setminus A = \bigcup_{i=1}^{4} A_i\,, \qquad \text{donde} \quad \begin{cases} A_1 = \{\text{4-listas con } 1^a = 2^a\},\ A_2 = \{\text{4-listas con } 2^a = 3^a\} \\ A_3 = \{\text{4-listas con } 3^a = 4^a\},\ A_4 = \{\text{4-listas con } 4^a = 1^a\} \end{cases}$$

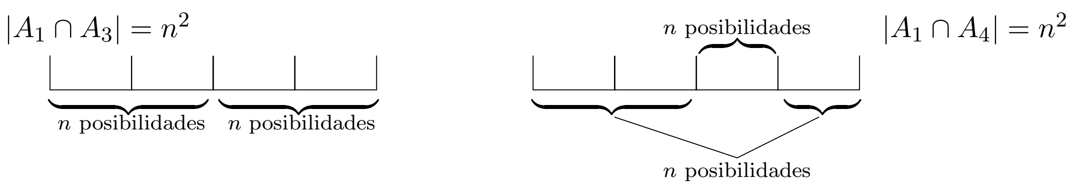
una unión de conjuntos (no disjuntos). El principio de inclusión/exclusión nos dice que

$$|A| = |X| - \sum_{j=1}^{4} |A_j| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|\,.$$

Compruebe el lector que, por ejemplo,

$$|A_1| = \#\{\text{4-listas con símbolos } \{1,\dots,n\} \text{ tales que } 1^a = 2^a\} = n^3$$

y que también $|A_2| = |A_3| = |A_4| = n^3$. Vamos con las intersecciones dos a dos. El siguiente argumento gráfico nos convence de que, por ejemplo, $A_1 \cap A_3$ y $A_1 \cap A_4$ tiene el mismo tamaño, n^2, aunque por "razones" distintas:

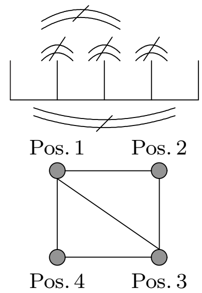


Compruebe el lector que el resto de las intersecciones dos a dos tienen también tamaño n^2. Una sencilla inspección muestra que las intersecciones tres a tres son también todas de igual tamaño; por ejemplo, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = n$, porque que en la primera y segunda posiciones aparezca el mismo símbolo, en la segunda y tercera también, y lo mismo en la tercera y cuarta, hace que el mismo símbolo deba aparecer en las cuatro posiciones (y hay n posibilidades para elegir este símbolo). Por supuesto, la intersección de los cuatro conjuntos tiene también tamaño n, así que podemos concluir que

$$|A| = |X| - \Big|\bigcup_{i=1}^{4} A_i\Big| = \binom{4}{0}n^4 - \binom{4}{1}n^3 + \binom{4}{2}n^2 - \binom{4}{3}n + \binom{4}{4}n = n(n-1)(n^2-3n+3)\,.$$

Mucho ruido, para tan pocas nueces, se dirá el lector. Total, para obtener un resultado que ya conocíamos. Pero bueno, si al menos todas las intersecciones del mismo tipo tienen siempre el mismo tamaño...

Veamos otro ejemplo, en el que el conjunto de restricciones es el que se representa a la derecha. Argumentamos como antes: el conjunto de listas prohibidas será la unión de los conjuntos



$$\begin{aligned}
&A_1 = \{\text{listas con } 1^a = 2^a\},\ A_2 = \{\text{listas con } 2^a = 3^a\}\\
&A_3 = \{\text{listas con } 3^a = 4^a\},\ A_4 = \{\text{listas con } 1^a = 3^a\}\\
&A_5 = \{\text{listas con } 1^a = 4^a\}\,;
\end{aligned}$$

una restricción más que antes. Compruebe el lector que todos los A_j tienen tamaño n^3, y que todas las intersecciones dos a dos tienen tamaño n^2.

Pero ¡cuidado!, la simetría se rompe al llegar a las intersecciones tres a tres, de las que hay $\binom{5}{3} = 10$. La mayor parte de ellas tienen tamaño n. Por ejemplo, la intersección $A_1 \cap A_2 \cap A_3$, porque estar en A_1 exige tener el mismo símbolo en las dos primeras posiciones; estar en A_2 hace que la tercera lleve ese símbolo común; y estar en A_3 exige que ese símbolo aparezca también en la cuarta posición. Solo hay que decidir, pues, el símbolo común a toda la lista.

Sin embargo, hay dos intersecciones que tienen tamaño n^2. Veamos, por ejemplo, el caso $|A_1 \cap A_2 \cap A_4|$. Por estar en A_1 y en A_2, las tres primeras posiciones han de llevar el mismo símbolo; pero estar en A_4 no añade información, pues exige que la primera y tercera posiciones lleven el mismo símbolo. Así que hay que elegir un símbolo para las tres primeras posiciones, y otro para la cuarta (n^2 posibilidades). Lo mismo ocurre para la intersección $A_3 \cap A_4 \cap A_5$. Note el lector que estos dos casos se corresponden con configuraciones en las que las aristas correspondientes abarcan únicamente tres vértices en triángulo (véase el dibujo).

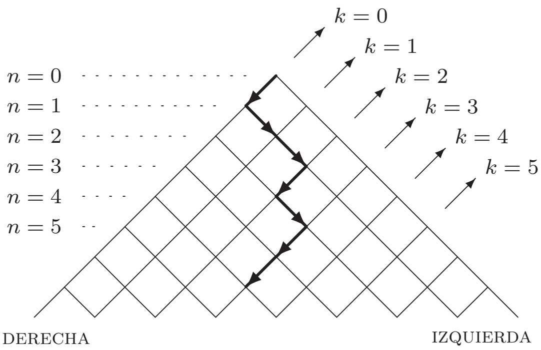
Si el lector se esmera analizando todos los casos, comprobará que las intersecciones cuatro a cuatro y la intersección cinco a cinco tienen todas el mismo tamaño, n, así que

$$\begin{aligned}
\#\ \text{listas} &= |\mathcal{X}| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5| = \binom{5}{0}n^4 - [\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5]\\
&= \binom{5}{0}n^4 - \binom{5}{1}n^3 + \binom{5}{2}n^2 - \left[\binom{5}{3} - 2\right]n - 2n^2 + \binom{5}{4}n - \binom{5}{5}n.
\end{aligned}$$

Si simplificamos esta expresión, obtenemos $n(n-1)(n-2)^2$. Pero ¡espere!, eso mismo habríamos obtenido si nos hubiéramos lanzado, de manera algo osada, a contar las listas directamente, en plan regla del producto: n posibilidades para la primera posición, $n-1$ para la segunda, $n-2$ para la tercera (recuérdese la arista diagonal en la representación con grafos) y otra vez $n-2$ (porque en las posiciones 1 y 3 van símbolos distintos) para la cuarta posición.

O sea que a veces se puede aplicar la regla del producto, otras veces hay que argumentar con el principio de inclusión/exclusión, pero incluso en este caso a veces todas las intersecciones tienen el mismo tamaño y otra veces no, en función de cómo se combinen las restricciones. . . ¿Y esto hay que hacerlo para listas con muchas posiciones y un buen número de restricciones? No, oiga, no, protestará el lector: ¡pongan algo de orden en estos cálculos! Y esto es justamente lo que haremos, ya con el lenguaje de los grafos, en la sección 11.3.3, cuando desarrollemos lo que daremos en llamar el *polinomio cromático* de un grafo.

3.1.5. Una interpretación gráfica de los coeficientes binómicos



Vamos a considerar la red que aparece dibujada a la derecha de estas líneas, en la que cada nodo se identifica con unas coordenadas (n, k), tal como se indica en la figura. Nuestro objetivo es estudiar los posibles caminos desde $(0, 0)$ hasta un cierto (n, k) tales que, en cada paso, desde cada nodo sólo se puede pasar a los nodos que están inmediatamente debajo. La longitud del camino será el número de pasos dados. Para cada par de valores n y k, llamaremos $Cam(n, k)$ al número de caminos distintos que podemos trazar desde el nodo $(0, 0)$ a un nodo cualquiera de coordenadas (n, k). Distintos, por supuesto, significará que las sucesiones de pasos de que constan se diferencian en alguno de ellos. Para fijar ideas, en la descripción de los caminos utilizaremos la nomenclatura de "paso a la derecha" y "paso a la izquierda" adoptando el punto de vista de un caminante que circulara por la red (así que es la orientación *contraria* a la del lector que lee estas páginas).

FIGURA 3.3: Pólya

Esta formulación, que como veremos es muy rica y elegante, se debe al matemático húngaro Pólya[17], quien es también responsable de las teorías que hay detrás del estudio de la combinatoria con simetrías (véase el capítulo 18) y del paseo aleatorio (véase el capítulo 20, en el que nos volveremos a encontrar con estas figuras).

Para algunos de los valores posibles de los parámetros n y k es sencillo calcular el correspondiente número $Cam(n, k)$. Por ejemplo, para cualquier $n \geq 0$, $Cam(n, 0) = 1$, porque sólo hay un camino que lleve del $(0, 0)$ al $(n, 0)$ (el que consiste en dar siempre pasos a la derecha). De la misma manera, $Cam(n, n) = 1$ (dar sólo pasos a la izquierda). El objetivo es encontrar, si es que la hay, una fórmula cerrada para $Cam(n, k)$ en términos de n y k.

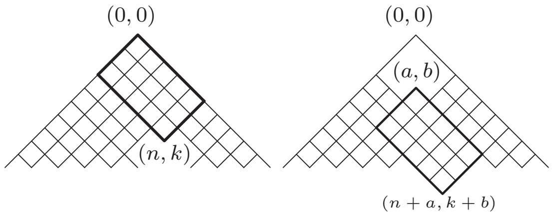
El lector, quizás inspirado por el aspecto de la figura[18], estará ya sospechando que estos números guardan relación con los coeficientes binómicos. Para comprobarlo, enunciemos una serie de propiedades que verifican estos números, que nos resultarán sin duda familiares.

[17]George Pólya (1887-1985) es uno de los miembros más destacados de la magnífica escuela matemática húngara del siglo XX. Su actividad se desarrolló en diversos lugares, primero en su Budapest natal (hasta 1912), luego en Göttingen (1913) y Zürich, desde 1914 hasta 1940 (en 1924 estuvo en Inglaterra, trabajando con Hardy y Littlewood; el libro *Inequalities* es uno de los frutos de esta colaboración). La siguiente etapa de esta suerte de paseo aleatorio vital (una estupenda biografía suya se titula justamente *The random walks of George Pólya*, Gerard Alexanderson, MAA, 2000) fue la Universidad de Stanford en Estados Unidos, a donde emigró en 1940, y en la que permanecería hasta el final de sus días. Pólya trabajó en diversos campos de las Matemáticas: Teoría de Números, Combinatoria, Análisis real y complejo, Probabilidad, etc.; algunas de estas aportaciones las iremos recogiendo en estas páginas. Pero, además de por esta actividad investigadora, Pólya es famoso por sus reflexiones sobre la actividad matemática y la didáctica de las matemáticas: libros como *How to solve it* (1945), *Mathematics and plausible reasoning* (1954) o *Mathematical Discovery* (1962) han sido auténticos éxitos editoriales.

[18]O más simplemente, por el título de esta subsección.

A. Traslación

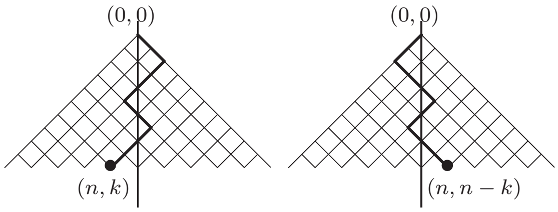
Esta primera propiedad será útil en análisis posteriores: observemos los esquemas de la derecha. Ni los caminos de $(0,0)$ a (n,k) ni los que van de (a,b) a $(n+a,k+b)$ pueden salirse del área señalada, y como ambas zonas son iguales, podremos deducir que:



$$Cam(n,k) = \#\big\{\text{caminos } (0,0) \to (n,k)\big\} = \#\big\{\text{caminos } (a,b) \to (a+n,b+k)\big\}.$$

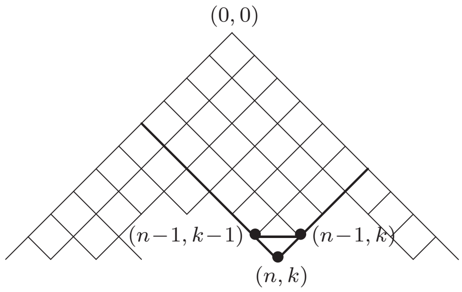
B. Reflexión

Consideremos un camino de $(0,0)$ a (n,k). Si lo reflejamos con respecto al eje vertical que pasa por el $(0,0)$, obtenemos un camino de $(0,0)$ a $(n,n-k)$. Esta reflexión es una biyección entre el conjunto de caminos que unen $(0,0)$ con (n,k) y el conjunto de los que conectan $(0,0)$ con $(n,n-k)$. De manera que $Cam(n,k) = Cam(n,n-k)$.



C. Recursión

La propiedad anterior nos recuerda, desde luego, a las propiedades de simetría de los coeficientes binómicos. ¿Cumplirán también la misma regla de recurrencia? Clasifiquemos los caminos hasta (n,k) dependiendo del vértice inmediatamente superior por el que pasen. Esto es una partición de nuestro conjunto total de caminos:



$$\left\{\begin{matrix}\text{caminos}\\ (0,0)\to(n,k)\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{caminos } (0,0)\to(n-1,k-1)\\ \text{y luego izquierda}\end{matrix}\right\} \bigcup \left\{\begin{matrix}\text{caminos } (0,0)\to(n-1,k)\\ \text{y luego derecha}\end{matrix}\right\}.$$

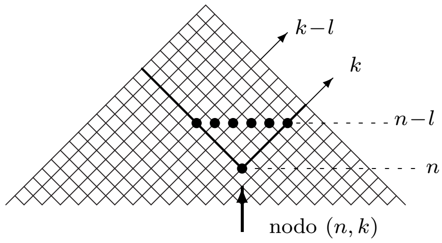
Ahora obtenemos los tamaños de los conjuntos calculando, simplemente, de cuántas maneras se puede llegar a los puntos $(n-1,k-1)$ y $(n-1,k)$, respectivamente:

$$Cam(n,k) = Cam(n-1,k-1) + Cam(n-1,k)\,.$$

Tenemos entonces dos familias de números, $Cam(n,k)$ y los coeficientes binómicos $\binom{n}{k}$, que satisfacen la misma ecuación de recurrencia y que tienen los mismos valores frontera. Esto supone que $Cam(n,k)$ coincide, para cada par de valores de los parámetros n y k con el coeficiente binómico $\binom{n}{k}$. Así que, después de todo, no estamos más que ante otra interpretación combinatoria de los coeficientes binómicos.

En lo que sigue vamos a aprovechar esta nueva interpretación de los coeficientes binómicos para obtener algunas expresiones interesantes.

D. Barrera horizontal



Vamos a clasificar los caminos hasta (n,k) según el nodo de la barrera horizontal de un nivel anterior $n-l$ por el que pasan (véase el dibujo). Los nodos de la barrera tienen coordenadas $(n-l, k-l+m)$, donde $m = 0, 1, \dots, l$. Esto da lugar a una partición del conjunto de caminos, pues *todos* los caminos hasta (n,k) han de pasar *necesariamente* por uno (y sólo uno) de los nodos de la barrera:

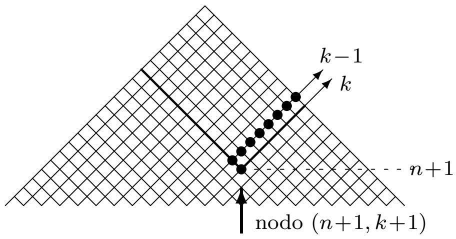
$$\left\{ \begin{array}{c} \text{caminos} \\ (0,0) \to (n,k) \end{array} \right\} = \bigcup_{m=0}^{l} \left\{ \begin{array}{c} \text{caminos consistentes en ir } (0,0) \to (n-l, k-l+m) \\ \text{y luego ir } (n-l, k-l+m) \to (n,k) \end{array} \right\}$$

A la izquierda tenemos $\binom{n}{k}$ caminos distintos. Del punto $(0,0)$ al punto $(n-l, k-l+m)$ se puede ir de $\binom{n-l}{k-l+m}$ maneras distintas. Y hay tantos caminos desde $(n-l, k-l+m)$ hasta (n,k) como entre $(0,0)$ y $(l, l-m)$, como podrá comprobar el lector si aplica cuidadosamente la regla A de traslación. Aplicando las reglas de la suma y el producto, concluimos que:

$$\binom{n}{k} = \sum_{m=0}^{l} \binom{l}{l-m} \binom{n-l}{k-l+m},$$

que es la fórmula de Vandermonde de la página 114 (cámbiese el índice m por $j = l - m$).

E. Barrera diagonal



Ahora, para un cierto nodo de la red, que por comodidad tomaremos de coordenadas $(n+1, k+1)$, consideramos la barrera diagonal que incluye a los nodos de segundo índice k (véase el dibujo). Es decir, los nodos de coordenadas (j,k), con $j = k, \dots, n$. Como antes, pretendemos clasificar los caminos de $(0,0)$ a $(n+1, k+1)$ dependiendo de su paso por la barrera. Podríamos, por ejemplo, escribir que

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{caminos} \\ (0,0) \to (n,k) \end{array} \right\} = \bigcup_{j=k}^{n} \left\{ \begin{array}{c} \text{caminos consistentes en ir } (0,0) \to (j,k) \\ \text{y luego ir } (j,k) \to (n+1, k+1) \end{array} \right\}$$

Pero esto no es una partición, pues hay caminos que están en más de uno de los conjuntos de la derecha. Imagine el lector un camino que llegue a un nodo intermedio de la barrera y luego baje un rato por ella. Para resolver esta dificultad, y contar una única vez cada camino, los clasificamos dependiendo de cuál sea el *último* nodo de la barrera por el que se pase:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{caminos} \\ (0,0) \to (n,k) \end{array} \right\} = \bigcup_{j=k}^{n} \left\{ \begin{array}{c} \text{caminos } (0,0) \to (n+1, k+1) \text{ tales que } (j,k) \\ \text{es el último nodo de la barrera por el que pasan} \end{array} \right\}$$

Ahora sí que tenemos una verdadera partición, y bastará contar cuántos elementos tiene cada bloque de la partición.

Pero si el nodo (j,k) es el último de la barrera que se toca, entonces el recorrido, más allá de ese punto, está ya fijado: paso a la izquierda y luego bajada hasta el nodo $(n+1,k+1)$. Concluimos así que

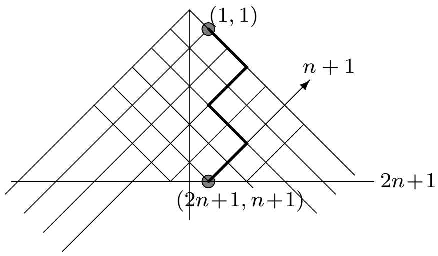
$$\boxed{\binom{n+1}{k+1}} = \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \boxed{\sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k}}$$

¡Atención!, esta última fórmula es nueva y útil. Ya sabemos sumar los coeficientes binómicos cuando variamos el índice inferior. Aquí tenemos la suma análoga cuando variamos el superior. Mostramos juntas ambas fórmulas, para que lector aprecie la diferencia: si $k \le n$,

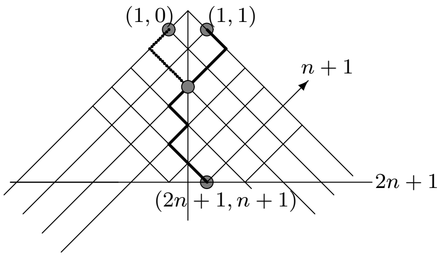
$$\sum_{j=0}^{n} \binom{k}{j} = 2^k \qquad \text{y} \qquad \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Ejemplo 3.1.6 *Una fórmula para los números de Catalan C_n.*

Si el lector dócil revisa el ejemplo 2.3.3, recordará que C_n cuenta, entre otras muchas cosas, el número de listas $(x_1,\dots,x_{2n})$, donde $x_j = \pm 1$ (hay n unos y n menos unos), y de manera que las sumas parciales, esto es, x_1, x_1+x_2, $x_1+x_2+x_3$, etc, sean siempre no negativas.



Traduzcámoslo a nuestro contexto: un $+1$ querrá decir un paso a la izquierda (recordemos, izquierda para el habitante de la red), y un -1, un paso a la derecha. Así que una lista $(x_1,\dots,x_{2n})$ formada con $+1$ y -1 (la mitad de cada) es un camino en el que se dan n pasos a la izquierda y otros tantos a la derecha. Empezamos en el punto $(1,1)$. De los $2n$ pasos, n han de ser hacia la izquierda; así que necesariamente acabamos en el punto de coordenadas $(2n+1,n+1)$. Además, en cada momento, al menos se han dado tantos pasos a la izquierda como a la derecha, así que nunca podremos tocar la línea vertical. Las listas que interesan se corresponden, pues, con caminos como el que exhibimos en el dibujo anterior.



El número total de caminos posibles desde $(1,1)$ hasta $(2n+1,n+1)$ es $\binom{2n}{n}$; pero sólo queremos contar aquéllos que no tocan la línea vertical. Aquí llega la idea brillante[19]: un argumento de reflexión. Vamos a evaluar el tamaño del complementario, los caminos que *sí* tocan la vertical: supongamos que tenemos uno de ellos, como el que aparece en el dibujo de la derecha, y consideremos la *primera vez* que alcanza la barrera. Reflejando este primer tramo, a cada camino que toca la línea le hacemos corresponder uno desde $(1,0)$ a $(2n+1,n+1)$.

Pero al revés también, pues un camino de $(1,0)$ a $(2n+1,n+1)$ está obligados a cruzar la línea vertical. El lector podrá comprobar que justo el considerar la "primera vez" que tocan la barrera es lo que hace que sea una biyección entre los dos tipos de caminos. Ahora, de

[19]Idea que, por consiguiente, no es original de los autores.

$(1, 0)$ a $(2n+1, n+1)$, con el argumento de traslación habitual, sabemos que hay tantos como de $(0, 0)$ a $(2n, n+1)$; esto es, $\binom{2n}{n+1}$ caminos. Así que, finalmente, deducimos que

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} \qquad \text{para cada } n \geq 0.$$

Dejamos que el lector se entretenga con las manipulaciones algebraicas que conducen a la siguiente fórmula, que nos permite calcular los valores de la sucesión:

$$\boxed{C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}} \qquad (C_n) = (1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796 \dots)$$

♣

3.1.6. Coeficientes multinómicos

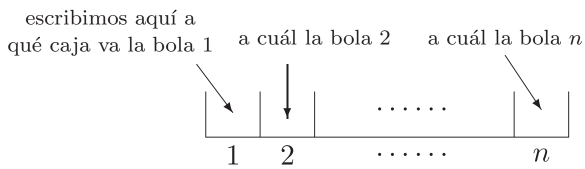
Los coeficientes multinómicos

$$\binom{n}{a_1, a_2, \dots, a_k} = \frac{n!}{a_1!\, a_2! \dots a_k!}$$

aparecieron fugazmente en la subsección 3.1.2, al tratar, claro, el multinomio de Newton. En la expresión de arriba está implícito el convenio según el cual el coeficiente multinómico es 0 si los enteros no negativos $a_1, \dots, a_k$ no suman exactamente n.

Pero si aparecieron allí es justamente porque son respuesta a una cuestión combinatoria que pasamos a enunciar, en dos versiones. Se trata de contar

- el número de formas de distribuir n bolas *numeradas* en k cajas *numeradas* de forma que haya a_1 bolas en la primera caja, a_2 en la segunda, etc., donde $a_1 + \cdots + a_k = n$;
- o el número de listas de longitud n formadas con los símbolos $\{1, \dots, k\}$ con exactamente a_1 unos, a_2 doses, etc. De nuevo, los números $a_1, \dots, a_k$ cumplen que $a_1 + \cdots + a_k = n$.



La biyección entre las dos cuestiones es inmediata: distribuir las n bolas en k cajas con las restricciones citadas exige decidir a qué caja va cada bola. Es decir, formar una lista de n posiciones (una por bola), en las que indicamos a qué caja va cada bola. Si queremos que haya a_1 bolas en la caja 1, a_2 en la caja 2, etc., entonces en la lista han de aparecer exactamente a_1 unos, a_2 doses, etc. Y si nos dan la lista con todas estas condiciones, la reinterpretación en términos de distribuciones en cajas es obvia.

¡Ay!, las dichosas distribuciones de bolas en cajas, ese lenguaje tan del gusto de los que se dedican a menesteres combinatorios. En la sección 3.1.3 tuvimos un primer contacto con este lenguaje, aunque entonces tratábamos distribuciones de bolas *idénticas* en cajas numeradas. Ahora, al considerar a las bolas como *numeradas*, esto es, *distinguibles*, no basta, como allí, con informar de *cuántas* bolas van en cada caja; hay que señalar también *cuáles* son.

Si la cuestión se hubiera planteado sin restricciones sobre el número de bolas por caja (o sobre el número de veces que aparece cada símbolo en la lista), el análisis sería directo:

bastaría decidir a qué caja va cada bola; o cuál es el símbolo de cada posición de la lista. Lo que, por la regla del producto, se puede hacer de k^n maneras. Es otra manera de entender las listas (en este caso, de longitud n y k símbolos) o las aplicaciones $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ si es que $|\mathcal{X}| = k$ e $|\mathcal{Y}| = n$ (revise el lector el ejemplo 2.2.5 y cambie allí los papeles de n y k).

Nuestro problema requiere un análisis diferente. Vemos primero un ejemplo sencillo, que nos da la pista para el argumento general. Digamos que hay que repartir n bolas numeradas en 3 cajas numeradas, con a_1 bolas en la primera caja, a_2 en la segunda y a_3 en la tercera, donde $a_1 + a_2 + a_3 = n$. Contamos cuántas distribuciones hay con el siguiente proceso:

1. Elegimos *cuáles* (recordemos que las bolas son distinguibles) son las a_1 bolas que van a la caja 1. Esto se puede hacer de $\binom{n}{a_1}$ formas distintas.
2. Elegimos las bolas de la segunda caja de entre las $n - a_1$ bolas que quedan; tenemos $\binom{n-a_1}{a_2}$ maneras de hacerlo.
3. Las de caja 3 quedan ya determinadas (las restantes), así que no habrá que decidir nada en este paso. Aunque también podríamos argumentar como en los dos pasos anteriores y observar que las bolas de la caja 3 se pueden elegir de $\binom{n-a_1-a_2}{a_3} = \binom{a_3}{a_3} = 1$ forma.

La regla del producto nos dice entonces que el número de posibles distribuciones es

$$\binom{n}{a_1}\binom{n-a_1}{a_2}\binom{a_3}{a_3} = \frac{n!}{a_1!(n-a_1)!}\frac{(n-a_1)!}{a_2!(n-a_1-a_2)!}\frac{(n-a_1-a_2)!}{a_3!0!} = \frac{n!}{a_1!\,a_2!\,a_3!}\,.$$

El lector podrá comprobar que el mismo argumento se puede aplicar al caso general, para obtener que el número de distribuciones de n bolas distinguibles en k cajas numeradas con a_1 bolas en la primera caja, a_2 en la segunda, etc., donde $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$, viene dado por el coeficiente multinómico

$$\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k} = \frac{n!}{a_1!\,a_2!\,\ldots a_k!}\,.$$

Note el lector que el caso $k = 2$ es algo especial, pues si $a_1 + a_2 = n$, entonces $a_2 = n - a_1$, así que

$$\binom{n}{a_1, a_2} = \frac{n!}{a_1!\,a_2!} = \frac{n!}{a_1!\,(n-a_1)!} = \binom{n}{a_1}\,,$$

y recuperamos el coeficiente binómico habitual. Una cierta ambigüedad de notación que confiamos en que no cause confusión.

Ejemplo 3.1.7 *Se pretende repartir los* 25 *empleados de una empresa en* 4 *grupos de trabajo: el de relación con los clientes debe constar de* 4 *personas; el de desarrollo de proyectos, de* 6 *personas;* 7 *personas irían al grupo de contabilidad, mientras que las* 8 *restantes trabajarían en tareas de organización interna. ¿De cuántas maneras se pueden estructurar estos grupos?*

El objetivo es repartir 25 bolas numeradas (las personas) en 4 cajas numeradas (los grupos de trabajo), con 4 en la primera, 6 en la segunda, 7 en la tercera y 8 en la cuarta. Respuesta:

$$\binom{25}{6,\,4,\,7,\,8} = \frac{25!}{4!\,6!\,7!\,8!} = 4417238826000 \qquad \text{formas distintas}$$

casi cuatro billones y medio, una cantidad por cierto enorme. ♣

¿Y por qué aparecen estos números en el multinomio de Newton,

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{a_1,\dots,a_k \geq 0} \binom{n}{a_1,\, a_2, \dots,\, a_k} {x_1}^{a_1} {x_2}^{a_2} \cdots {x_k}^{a_k} \quad ?$$

Tendríamos que contar cuántas veces aparece cada término $x_1^{a_1} \cdots x_k^{a_k}$ en el desarrollo de $(x_1 + \cdots + x_k)^n$. Si el lector se construye un esquema como el que aparecía al principio de la subsección 3.1.2 dedicada al teorema del binomio, poniendo en columna los n factores $(x_1 + \cdots + x_k)$, se convencerá que para que aparezca $x_1^{a_1} \cdots x_k^{a_k}$ hay que escoger a_1 veces el x_1, a_2 veces el x_2, etc. Lo que nos lleva al coeficiente multinómico correspondiente.

Cerramos esta subsección insistiendo en la interpretación en términos de listas, no tanto por el resultado, que ya es conocido, sino por una manera de argumentar que es útil en muchas ocasiones. Queremos contar cuántas n-listas podemos formar con los símbolos $\{1, \dots, k\}$ de manera que haya a_1 unos, a_2 doses, etc., donde $a_1 + \cdots + a_k = n$. Ya sabemos que la respuesta está en el coeficiente multinómico correspondiente.

Pero argumentemos de la siguiente manera: hagamos que los símbolos sean *distinguibles*. ¿Cómo que distinguibles?, ¿pero de qué manera vamos a poder distinguir, por ejemplo, dos unos entre sí?, protestará el lector, alarmado ante este nuevo artificio. Pues justamente etiquetando de cierta manera cada símbolo. Para ello consideramos el nuevo conjunto de símbolos siguiente:

$$1_1, 1_2, \dots, 1_{a_1}, 2_1, \dots, 2_{a_2}, \dots, k_1, \dots, k_{a_k}\,.$$

Hemos considerado tantos “clones” del símbolo 1 como nos indica el valor de a_1, tantos del 2 como indique a_2, etc. Ahora, en total hay n símbolos distinguibles, que podemos disponer en una n-lista de $n!$ maneras distintas. Pero, para contrarrestar la diferenciación ficticia y auxiliar que hemos introducido, por ejemplo, entre los unos, deberemos dividir por un factor $a_1!$ (construya el lector explícitamente la aplicación $a_1!$ a 1 que hay detrás de este comentario). Lo mismo deberemos hacer con los doses, con los treses, etc. Así llegamos, de nuevo, al resultado

$$\frac{n!}{a_1!\, a_2! \cdots a_k!} = \binom{n}{a_1,\, a_2, \dots,\, a_k}.$$

No le extrañará al lector, a la vista de este argumento, que en algunos textos se utilice el nombre de (número de) *permutaciones con repetición* para describir esta cantidad.

Ejemplo 3.1.8 *¿Cuántas listas de longitud 8 formadas por 2 aes, 3 bes y 3 ces hay?*

Las listas están formadas por los símbolos a, a, b, b, b, c, c, c, pero por supuesto no todas las $8!$ permutaciones posibles dan lugar a listas distintas. Aplicamos de nuevo el truco citado antes: hacemos distinguibles los símbolos, $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$, y formamos las $8!$ permutaciones posibles. Obtenemos así, por ejemplo, listas como

$$\boxed{a_1 \mid a_2 \mid b_1 \mid b_2 \mid b_3 \mid c_3 \mid c_2 \mid c_1} \quad \text{y} \quad \boxed{a_2 \mid a_1 \mid b_1 \mid b_2 \mid b_3 \mid c_3 \mid c_2 \mid c_1}$$

que, al borrar los subíndices de las aes, dan lugar a la misma, (a, a, b, b, b, c, c, c). Solucionamos esta proliferación espuria de listas dividiendo por los factoriales correspondientes:

$$\frac{8!}{2!\,3!\,3!} = \binom{8}{3,\, 2,\, 3} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{2 \times 2 \times 3} = 560\,.$$

♣

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3.1

3.1.1 *Pruébese, por inducción, que*

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n \,.$$

Recuerde el lector el argumento combinatorio de la subsección 3.1.1 *y la prueba, vía el teorema del binomio, de la subsección* 3.1.2.

3.1.2 *Queremos probar que el valor máximo en cada fila del triángulo de Tartaglia es el central (o centrales). Es decir, que*

$$\max_{k=0,\dots,n} \left\{ \binom{n}{k} \right\} = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} .$$

(a) Utilícese la propiedad de simetría de los coeficientes binómicos para deducir que basta calcular ese máximo en el rango $0 \le k \le \lfloor n/2 \rfloor$.

(b) Supóngase, por ejemplo, que n es par. Compruébese que, siempre que $k \le n/2$, $\binom{n}{k-1} < \binom{n}{k}$.

(c) Complétense los detalles del caso en que n sea impar.

3.1.3 *Pruébese que, si k es un cierto número fijo, entonces*

$$\text{tanto} \quad \binom{n-1}{k-1} \quad \text{como} \quad \binom{n+k-1}{k-1} \quad \text{como} \quad \binom{n+\binom{k}{2}-1}{k-1}$$

son asintóticamente (recuérdese el símbolo $\sim$ de la subsección 2.4.1) *como* $\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$ *cuando* $n \to \infty$.

3.1.4 *(a) Tenemos* $2n$ *bolas rojas numeradas y otras* $2n$ *bolas blancas numeradas. ¿De cuántas formas distintas se puede escoger, de entre esas* $4n$ *bolas, un conjunto con n bolas rojas y n blancas?*

(b) Tenemos 10 *bolas rojas numeradas y* 6 *bolas blancas numeradas. ¿De cuántas maneras puede escogerse un conjunto de* 9 *bolas de forma que a lo sumo haya* 4 *bolas rojas?*

(c) ¿De cuántas maneras distintas se pueden distribuir 40 *personas en* 8 *grupos de* 5 *personas?*

(d) ¿De cuántas maneras distintas se pueden distribuir 40 *bolas idénticas en* 6 *cajas numeradas, de manera que entre las tres primeras cajas se distribuyan* 25 *bolas y que en cada una de las dos últimas cajas se sitúen a lo sumo* 6 *bolas?*

3.1.5 *De "Nuestro hombre en La Habana", de Graham Greene:*

- No entiendo por qué escogiste ese número.
- ¿No te ocurre a ti que hay números que se te quedan grabados para siempre en la memoria?
- Sí, pero éste precisamente lo has olvidado.
- Lo recordaré enseguida. Era algo así como 77539.
- ¡Nada menos que cinco cifras!
- Podemos intentar todas las combinaciones de 77539.
- ¿Sabes cuántas hay? Como unas seiscientas, más o menos. Espero que no tengas prisa.
- Estoy seguro de todo menos del 7.
- Sí, pero ¿qué 7? Esto significa que hay que probar con seis mil configuraciones. No soy matemático, ¿sabes?

¿Podría el lector ayudar al personaje de esta novela y precisar sus cálculos?

3.1.6 *Consideremos las 22 consonantes* $\{b, c, \dots, z\}$ *y una única vocal* $\{a\}$. *Queremos formar con ellas palabras de 12 letras, de las cuales exactamente cinco sean consonantes (distintas), y en las que no aparezcan consonantes seguidas. ¿Cuántas distintas habrá?*

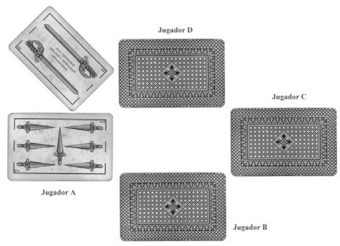
3.1.7 *(a) ¿Cuántos números entre* 0 *y* 9999 *tienen la suma de sus cifras igual a 7? (b) ¿Y ≤ 7?*

3.1.8 *Para su uso en este ejercicio, describimos brevemente la baraja española: consta de 40 cartas, que están agrupadas en cuatro palos (oros, copas, espadas y bastos). Cada palo cuenta con diez cartas: as, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, sota, caballo y rey.*

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un mazo "bien barajado" de cartas de una baraja española las dos primeros cartas no formen pareja (no sean, por ejemplo, dos ases, o dos sotas, o dos...)?

(b) ¿En cuántas "manos" distintas de 5 cartas de baraja española aparecen los 4 palos? (Nota: consideremos que una mano de 5 cartas es un subconjunto de 5 cartas).

(c) ¿Cuántas manos de cinco cartas de la baraja española son exactamente un trío (por ejemplo, tres sotas y las otras dos cartas que no sean sotas y que, además, sean distintas entre sí)? ¿Y exactamente dobles parejas?



(d) Estamos jugando a la pocha[20] *y tenemos la siguiente partida: sobre el mazo de cartas está el 2 de espadas (espadas es, por tanto, la "pinta"). El jugador A, que es mano (esto es, el primero en jugar), tiene un 7 de espadas. Lo único que nos interesa saber es que, con las reglas del juego, sólo hay en la baraja 5 cartas que superen el valor de su carta (sota, caballo, rey, tres y as de espadas). ¿Cuál es la probabilidad de que A pierda la jugada?*

3.1.9 *Si n bolas numeradas se distribuyen al azar en n cajas numeradas, ¿cuál es la probabilidad*
(a) de que ninguna caja quede vacía?;
(b) ¿y de que exactamente una caja quede vacía?

3.1.10 *(a) El tamaño medio de los subconjuntos de $\{1,\dots,n\}$, como vimos en el ejemplo* 3.1.2, *es $n/2$. Obténgase una prueba alternativa de este resultado utilizando la siguiente observación: por cada subconjunto A de tamaño k hay uno (el subconjunto $B=\{1,\dots,n\}\setminus A$) que tiene tamaño $n-k$.*

(b) La longitud de una composición de un número natural n es el número de sumandos. Pruébese que si un número n tiene M composiciones de longitud k, entonces también tiene M composiciones de longitud $n-k+1$. Dedúzcase que la longitud media de las composiciones del número n es $\frac{n+1}{2}$.

3.1.11 *Se tienen dos listas de símbolos, $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ y $(b_1,b_2,\dots,b_m)$, todos distintos. Se quiere formar una única lista con todos los $n+m$ símbolos respetando el orden dado de las a's y el orden dado de las b's. Por ejemplo, si $n=2$ y $m=3$ la lista (b_1,a_1,b_2,a_2,b_3) es válida, pero no así la lista (a_1,b_3,b_2,a_2,b_1)). ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?*

3.1.12 *Se distribuyen n bolas idénticas en m cajas numeradas. (a) ¿De cuántas formas distintas se puede hacer esto de manera que cada caja reciba al menos una bola y a lo sumo dos? (b) ¿Y si la única restricción es que haya a lo sumo dos en cada caja?*

3.1.13 *Consideremos el conjunto de símbolos $\mathcal{X}=\{1,2,3,\dots,50\}$. Diremos que un subconjunto A de $\mathcal{X}$ está separado si la diferencia entre cualesquiera dos de sus elementos es al menos tres unidades. Por ejemplo, $\{10,15,17,40\}$ no está separado, mientras que $\{10,15,18,40\}$ sí lo está. ¿Cuántos subconjuntos separados distintos de cinco elementos se pueden formar con los elementos de $\mathcal{X}$?*

3.1.14 *Tenemos n cerillas, que usamos para representar las letras I y V: la I requiere una cerilla, la V dos. ¿Cuántas "palabras" distintas de longitud k se pueden formar?*

3.1.15 *(a) Compruébese que el número de listas de longitud n con ceros y unos, en las que hay exactamente r unos, y sin unos consecutivos, es $\binom{n-r+1}{r}$.*

[20] Concesión local al, sin duda, juego más popular entre los alumnos de los autores.

(b) ¿De cuántas formas distintas se puede extraer de $\{1, 2, \dots, n\}$ *un conjunto de* r *números, de forma que no haya dos consecutivos?*

3.1.16 *Tenemos* n *posiciones, numeradas de 1 a* n*, marcadas sobre una circunferencia. Las vamos a rellenar con* r *unos y* $n-r$ *ceros, pero no queremos que, en ese orden circular, aparezcan unos consecutivos. ¿De cuántas maneras distintas lo podremos hacer?*

3.1.17 *En este ejercicio reunimos una serie de identidades que involucran coeficientes binómicos.*
(a) Pruébese, algebraica y combinatoriamente, que

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

(b) El apartado anterior es el caso $l = 1$ *de la siguiente identidad (que también pedimos demostrar):*

$$\binom{k}{l}\binom{n}{k} = \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}.$$

(c) Pruébese mediante un argumento combinatorio que

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2 \ .$$

(d) Pruébese la siguiente generalización del apartado anterior:

$$\binom{kn}{2} = k\binom{n}{2} + \binom{k}{2}n^2 .$$

(e) Verifíquense las siguientes identidades:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}; \qquad \sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{(n-k)!^2 k!^2} = \binom{2n}{n}^2; \qquad \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\binom{n}{k+1} = \binom{2n}{n+1}.$$

(f) Pruébese (y compárese con la fórmula de Vandermonde de la página 114*) la siguiente expresión:*

$$\binom{n}{k} = \sum_{j=k-l}^{n-l}\binom{j}{k-l}\binom{n-j-1}{l-1}$$

EL caso $l = 1$ *fue ya obtenido en la subsección* 3.1.5*.*

3.1.18 *Pruébese, con la fórmula de Stirling, la siguiente estimación asintótica para los números de Catalan:*

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{2^{2n}}{n^{3/2}} \qquad \textit{cuando } n \to \infty.$$

3.1.19 *(a) Pruébese, por inducción en* n*, el desarrollo del binomio:*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k .$$

(b) Pruébese, por inducción en k*, el desarrollo del multinomio:*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{a_1,\dots,a_k \geq 0}\binom{n}{a_1,\, a_2, \dots,\, a_k}\, {x_1}^{a_1}{x_2}^{a_2}\cdots{x_k}^{a_k} .$$

(c) Dedúzcase que $\displaystyle\sum_{a_1,\dots,a_k\geq 0}\binom{n}{a_1 \dots a_k} = k^n.$

3.1.20 *Sea $\mathcal{S} = \{s_1, s_1, s_2, s_2, \dots, s_m, s_m\}$ un multiconjunto que contiene dos copias de los distintos símbolos $s_1, s_2, \dots, s_m$. ¿De cuántas maneras distintas se puede formar una lista ordenada de los elementos de $\mathcal{S}$ con la condición de que los símbolos contiguos sean distintos?*

3.1.21 *Pruébese por inducción que*

$$(a)\quad |A_1 \cup \cdots \cup A_n| \leq \sum_{j=1}^{n} |A_j|\,; \qquad (b)\quad |A_1 \cup \cdots \cup A_n| \geq \sum_{j=1}^{n} |A_j| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j|\,.$$

3.1.22 *Consideremos una sucesión de números $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$ y las siguientes sumas alternadas en signo:*

$$S_k = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} a_j \qquad \textit{para cada } k = 1, \dots, n.$$

Compruébese, con un argumento gráfico, que $S_1 \geq S_3 \geq S_5 \geq \cdots$ y que $S_2 \leq S_4 \leq S_6 \leq \cdots$ Además, cualquier suma S_k de índice k impar es $\geq$ que todas las de índices pares. Verifíquese también que

$$|S_k - S_{l-1}| = \Big| \sum_{j=l}^{k} (-1)^{j+1} a_j \Big| \leq a_l \qquad \textit{si } k \geq l.$$

3.1.23 *Consideremos los conjuntos $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{1, 4\}$, $D = \{1, 5\}$, $E = \{1, 6\}$ y $F = \{1, 7\}$. Compruébese que, con la nomenclatura habitual del principio de inclusión/exclusión, $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$, mientras que $\alpha_3 = \alpha_4 > \alpha_5 > \alpha_6$.*

3.1.24 ***Desigualdad de Bonferroni***. *En este ejercicio vamos a proponer una demostración del lema 3.2. Consideramos unos conjuntos $A_1, \dots, A_n$ y llamamos $A = \cup_{j=1}^{n} A_j$. Llamemos también*

$$S_t = \sum_{j=1}^{t} (-1)^{j+1}\, \alpha_j\,, \quad \textit{para cada } t = 1, \dots, n.$$

Los números α_j son los habituales del principio de inclusión/exlusión, que nos dice que $S_n = |A|$. El lema que deseamos demostrar dice que $|S_n - S_t| \leq \alpha_{t+1}$ para cada $t = 1, \dots, n-1$.

(a) Empezamos con una estimación para sumas incompletas y alternadas en signo de coeficientes binómicos. Pruébese, por inducción (en k), que

$$\sum_{j=0}^{t} (-1)^{j+1} \binom{k}{j} = (-1)^{t-1} \binom{k-1}{t}$$

(nótese que si $t \geq k$, entonces ambos miembros de la identidad anterior valen 0).

(b) Necesitamos también comprobar que, si $k \geq t+1$

$$\binom{k-1}{t} \leq \binom{k}{t+1}$$

(nótese que si $t \geq k$, entonces ambos coeficientes binómicos son nulos).

(c) El argumento sigue las líneas de la demostración del principio de inclusión/exclusión de la subsección 3.1.4. *Obsérvese que $S_n - S_t$ es la suma de las entradas de las filas de la matriz que allí exhibimos desde las intersecciones $t+1$ a $t+1$ en adelante. Compruébese, utilizando el apartado (a), que*

$$S_n - S_t = \sum_{k=t+1}^{n} \#\left\{ \begin{array}{c} \text{elementos de } A \text{ en} \\ \text{exactamente } k \text{ de los } A_j \end{array} \right\} (-1)^t \binom{k-1}{t}$$

y dedúzcase, empleando ahora el apartado (b), que

$$|S_n - S_t| \le \sum_{k=t+1}^{n} \#\left\{ \begin{array}{c} \text{elementos de } A \text{ en} \\ \text{exactamente } k \text{ de los } A_j \end{array} \right\} \binom{k}{t+1}.$$

(d) Compruébese finalmente, argumentando únicamente sobre las filas de la matriz correspondientes a las intersecciones $t+1$ a $t+1$, que el miembro de la derecha de la última expresión coincide con α_{t+1}.

3.1.25 ***Una generalización del principio de inclusión/exclusión***. *Estamos de nuevo en la situación del ejercicio anterior, con los conjuntos $A_1, \dots, A_n$ y $A = \cup_{j=1}^n$. Tenemos la sucesión de números $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Definimos $\alpha_0 = A$. Definimos la sucesión de números $(E_j)_{j=0}^n$ de la siguiente manera: E_k cuenta el número de elementos de A que están en exactamente k de los conjuntos $A_1, \dots, A_n$ (obsérvese que $E_0 = 0$). Del último apartado del ejercicio anterior se deduce que*

$$\alpha_j = \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{j} E_k\,,$$

expresión que nos da el valor de un α_j en función de los E_k. Compruébese que podemos invertir esta expresión para expresar los E_k en función de los α_j de la siguiente manera:

$$E_k = \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} \alpha_j\,.$$

Obsérvese que el caso $k = 0$ es el principio de inclusión/exclusión habitual.

3.1.26 ***Una segunda generalización del principio de inclusión/exclusión***. *Supongamos que tenemos una colección de subconjuntos $A_1, \dots, A_n$ de un conjunto Ω, y una función p que a cada elemento de $\omega \in \Omega$ le asocia un cierto número positivo $p(\omega)$, su peso. Llamemos*

$$P_i = \sum_{\omega \in A_i} p(\omega)\,, \qquad \text{para cada } i = 1, \dots, n,$$

al peso total (la suma) de los elementos de A_i. Análogamente, llamemos

$$P_{i,j} = \sum_{\omega \in A_i \cap A_j} p(\omega) \quad (i \neq j)\,, \qquad P_{i,j,k} = \sum_{\omega \in A_i \cap A_j \cap A_k} p(\omega) \quad (i \neq j \neq k)\,, \qquad \text{etc.}$$

Consideremos, por último,

$$P = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \qquad \text{y} \qquad Q = \sum_{\omega \in \Omega \setminus \cup_i A_i} p(\omega)$$

Pruébese que

$$Q = P - \sum_{i=1}^{n} P_i + \sum_{i<j} P_{i,j} + \cdots + (-1)^n P_{1,\dots,n}\,.$$

Nota: Si $p(\omega) = 1$ para todo $\omega \in \Omega$, esto es el principio de inclusión/exclusión habitual.

3.1.27 *Generalícese el resultado del ejercicio 3.1.22 sobre sumas alternadas en signo de términos decrecientes (o consúltese directamente el teorema 12.1) para probar que, si D_n es el número de desbarajustes de $\{1, \dots, n\}$,*

$$\left| \frac{1}{e} - \frac{D_n}{n!} \right| = \left| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} - \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} .$$

Dedúzcase que, si $n > 1$, D_n es el entero más cercano a $n!/e$.

3.1.28 *Llamamos B_j al conjunto de permutaciones de $\{1, \dots, n\}$ en las que el símbolo j no está en la posición j. Pruébese que*

$$\frac{Prob(B_i \cap B_j)}{Prob(B_i)\, Prob(B_j)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

3.1.29 *a) Sea $D_n(k)$ el número de permutaciones de $\{1, 2, \dots, n\}$ que fijan exactamente k elementos. Así, $D_n(0)$ coincide con D_n, el número de desbarajustes de $\{1, 2, \dots, n\}$. Pruébese que*

$$D_n(k) = \binom{n}{k} D_{n-k} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!},$$

donde conviene definir $D_0 = 1$.

(b) El apartado anterior nos da la escala de cuán frecuentes son las permutaciones en función del número de símbolos que fijan. Recordemos que, si n es grande, el número de desbarajustes es $D_n(0) = D_n \approx n!/e$. Deduce, del resultado del apartado anterior, que

$$D_n(1) \approx \frac{n!}{e}, \qquad D_n(2) \approx \frac{n!}{2! \cdot e}, \qquad D_n(3) \approx \frac{n!}{3! \cdot e}, \qquad D_n(4) \approx \frac{n!}{4! \cdot e} \dots$$

Quizás el lector quiera comprobar la similitud con la situación del ejemplo 2.3.2.

3.1.30 *Pruébese la siguiente regla de recurrencia para un coeficiente multinómico:*

$$\binom{n}{a, b, c} = \binom{n-1}{a-1, b, c} + \binom{n-1}{a, b-1, c} + \binom{n-1}{a, b, c-1}, \qquad \text{donde } a + b + c = n.$$

Explíquese el significado combinatorio de esta identidad.